ANÁLISE

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

COMBINATÓRIA

Professor Gerson Henrique

Departamento Matemática Associação Pré-UFMG

Apresentação

Essa é uma apostila com conteúdo de ensino médio voltado para o vestibular – foco Vestibular universidade Federal de Minas Gerais. Foi idealizada com o intuito de fornecer um material acessível a todos os estudantes de ensino médio e pré-vestibulares que almejam sucesso no vestibular.

Esta apostila, contém o assunto de Introdução à análise Combinatória. É formulada numa linguagem simples, mas sem perda do rigor matemático.

Contém os seguintes tópicos:

1 – Introdução;
2 – Quando somar e quando multiplicar em combinatória;
3 – Permutações, 3.1 – Permutações simples, 3.2 – Permutações com repetição, 3.3 – Permutações circulares;
4 – Arranjos simples;
5 – combinações simples.

Os tópicos da matéria são apresentados, em seguida há *exercícios resolvidos* que auxiliam a fixação da matéria e por último vêm *os exercícios para você resolver*. Não deixe de resolvê-los, pois, é de fundamental importância para a concretização de seu aprendizado.

Espero que este material o auxilie em sua caminhada rumo a universidade.

Bons estudos!

O Autor

Dedico este trabalho a minha mãe, Madalena.

Análise combinatória

1 - Introdução

Em análise combinatória ou simplesmente combinatória estaremos envolvidos com problemas de contagem. Esse assunto é objeto de discussão e interesse há muitos anos, principalmente entre pessoas que disputam jogos de azar e almejavam saber as chances de vitória nas partidas que disputavam. Tem larga aplicação nos estudos de probabilidade e estatística. Além disso, problemas de contagem fazem parte do nosso cotidiano. Desde muito cedo aprendemos a contar e, aprendendo boas técnicas, podemos realizar contagens com eficiência, brevidade e precisão. É importante notar, ao resolver questões desse assunto, que apesar de haver uma infinidade de situações diferentes entre si, eles podem ter semelhanças em vários pontos. Dessa forma para que possa obter sucesso nesse assunto, não se esqueça de resolver muitas questões. Busque sempre semelhanças entre elas.

2 - Quando somar e quando multiplicar em combinatória

2.1 - Quando somamos resultados combinatórios lançamos mão do chamado princípio aditivo.

Veja esse exemplo:

Adriana tem dinheiro apenas para ir ao parque de diversões e brincar em apenas um dos 7 brinquedos disponíveis ou ir ao cinema e assistir apenas um filme dos 5 disponíveis. Dessa forma de quantas maneiras diferentes Adriana pode se divertir?

Se Adriana tem dinheiro apenas para uma diversão ela tem de optar **ou** por brincar em um dos brinquedos do parque **ou** assistir a um filme do cinema. Assim ela tem 7 opções para ir ao parque e 5 opções para ir ao cinema. Dessa forma ela tem 7 + 5 maneiras de se divertir.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Brinquedo 1}\\ \text{Brinquedo 2}\\ \text{Brinquedo 3}\\ \text{Brinquedo 4}\\ \text{Brinquedo 5}\\ \text{Brinquedo 6}\\ \text{Brinquedo 7}\end{array}\right\}\ \text{7 maneiras distintas} \qquad \left.\begin{array}{l}\text{Filme A}\\ \text{Filme B}\\ \text{Filme C}\\ \text{Filme D}\\ \text{Filme E}\end{array}\right\}\ \text{5 maneiras distintas}$$

7 brinquedos distintos + 5 filmes distintos = 12 maneiras distintas de se divertir.

É importante ressaltar o significado do termo distinto. Significa diverso, separado, que não se confunde com outro; para passar a idéia de casos não idênticos.

Para formalizar, observe a semelhança deste enunciado com o problema proposto anteriormente.

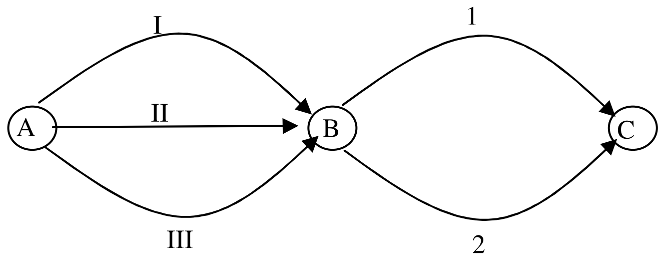
Dados dois conjuntos disjuntos (sem nenhum elemento comum; sem interseção) A e B, A contém m elementos e B contém p elementos. De quantos modos diferentes podemos escolher um elemento de A ou de B.

Como queremos um elemento de A ou de B, temos (m + p) maneiras de escolher um dos elementos. Esse resultado nada mais é do que o número de elementos da união dos dois conjuntos disjuntos.

2.2 - Quando multiplicamos em análise combinatória estamos lançando mão do princípio multiplicativo ou teorema fundamental da contagem.

Observe o exemplo:

Um motorista deseja viajar de uma A para a cidade C, mas para ir à cidade C deve-se passar necessariamente pela cidade B, veja a figura.

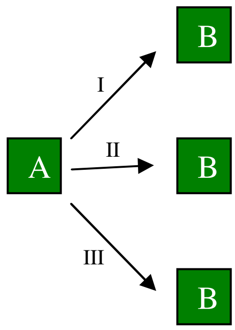


Como observado na figura, o motorista pode escolher entre três estradas para se deslocar de A para B e depois deve escolher uma entre as duas estradas para se deslocar de B para C.

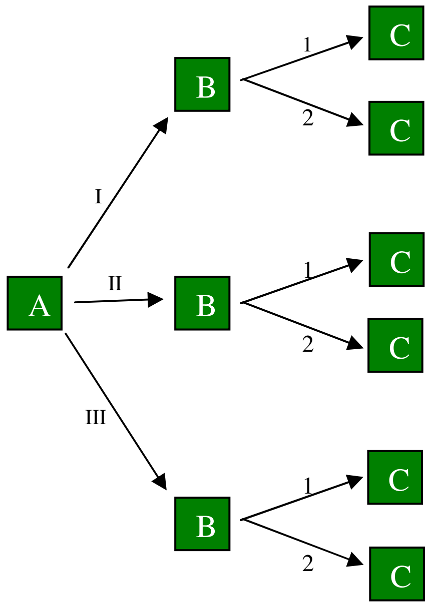
Essa situação difere e muito da do exemplo anterior. Aqui para que o motorista vá da cidade A para a cidade C tem de passar necessariamente pela cidade B. Isto é, tem de realizar duas ações para deslocar-se de A para C. Primeiro deve escolher uma estrada de A para B e em seguida outra que liga B a C.

Vamos inserir para a resolução dessa questão o conhecido diagrama da árvore. Recebe esse nome pelas ramificações que lembram galhos de uma árvore. Veja:

Primeiro escolhemos uma estrada que sai de A e vai até B



Assim temos 3 opções para o deslocamento. Após escolhido a primeira opção deve escolher o caminho de B para C. Assim tem-se:



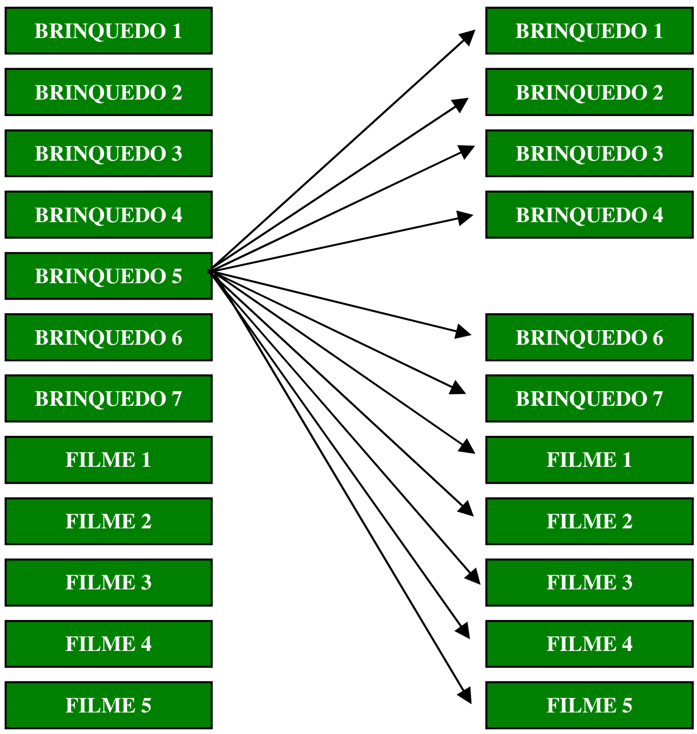
É crucial que você entenda que da cidade A para a cidade B, há três opções para o motorista, no entanto ele optara apenas por uma delas. Após a escolha surge uma nova dúvida para nosso amigo. Qual estrada usar para deslocar-se de B para C. Assim com essas duas sucessivas escolhas, pelo diagrama da árvore, vemos que nosso motorista tem seis opções para fazer a viagem. **Esse resultado é justamente o produto do número de opções para a escolha da primeira estrada pelo número de opções de escolha para a segunda. Portanto** $3 \cdot 2 = 6$

Vamos voltar a situação de Adriana do penúltimo exemplo. Descontente com sua situação, a de ter dinheiro apenas para uma opção de lazer, foi ao seu pai tentar arrecadar mais dinheiro. Foi atendida e agora tem dinheiro para duas ações. Dessa forma de quantas maneiras diferentes Adriana pode se divertir sem realizar duas vezes a mesma brincadeira?

Note que diante do fato nossa amiga pode realizar duas ações diferentes. Assim primeiro deve escolher uma diversão e em seguida outra que também a agrade.

Primeira escolha: Possui 12 opções de lazer
Segunda escolha: Possui 11 opções (não vai repetir a ação)

Veja que o diagrama da árvore ficaria imenso, se colocado todas as possibilidades, então ramificaremos apenas no brinquedo 5



Para a primeira escolha há 12 tipos de diversão. Supomos que foi escolhido o brinquedo 5 e após essa escolha vem a segunda ação. Não se esqueça que foi exigido que Adriana não repetisse a brincadeira. Restam agora 11 opções de escolha.

Tenha sempre em mente que há varias opções, mas só uma será escolhida. Estamos contando as possibilidades de escolha, não a escolha de Adriana, que será apenas uma. Dessa forma como Adriana optou pelo brinquedo 5, pode, logo em seguida, optar por outra escolhida dentre onze opções distintas. Só aí temos 11 opções de escolha (Veja o diagrama). Se optasse pelo brinquedo 1 ao invés do 5, teria mais 11 opções para a segunda ação. São mais 11 opções de diversão. Se escolhesse o Brinquedo 2 aí seriam mais 11 opções. Seguindo sucessivamente notamos que a cada primeira ação temos, para a segunda, 11 opções de lazer. Assim como são 12 as maneiras distintas de escolher a primeira ação concluímos que Adriana pode se divertir de

$$12 \times 11 = 132 \text{ maneiras diferentes}$$

Como dito anteriormente, a cada escolha da primeira ação decorre 11 opções de lazer. Assim:

1^a ação	2^a ação	3^a ação	...	12^a ação = 12 ações
11 opções +	11 opções +	11 opções +	...	+ 11 opções = 12 x 11 opções de lazer

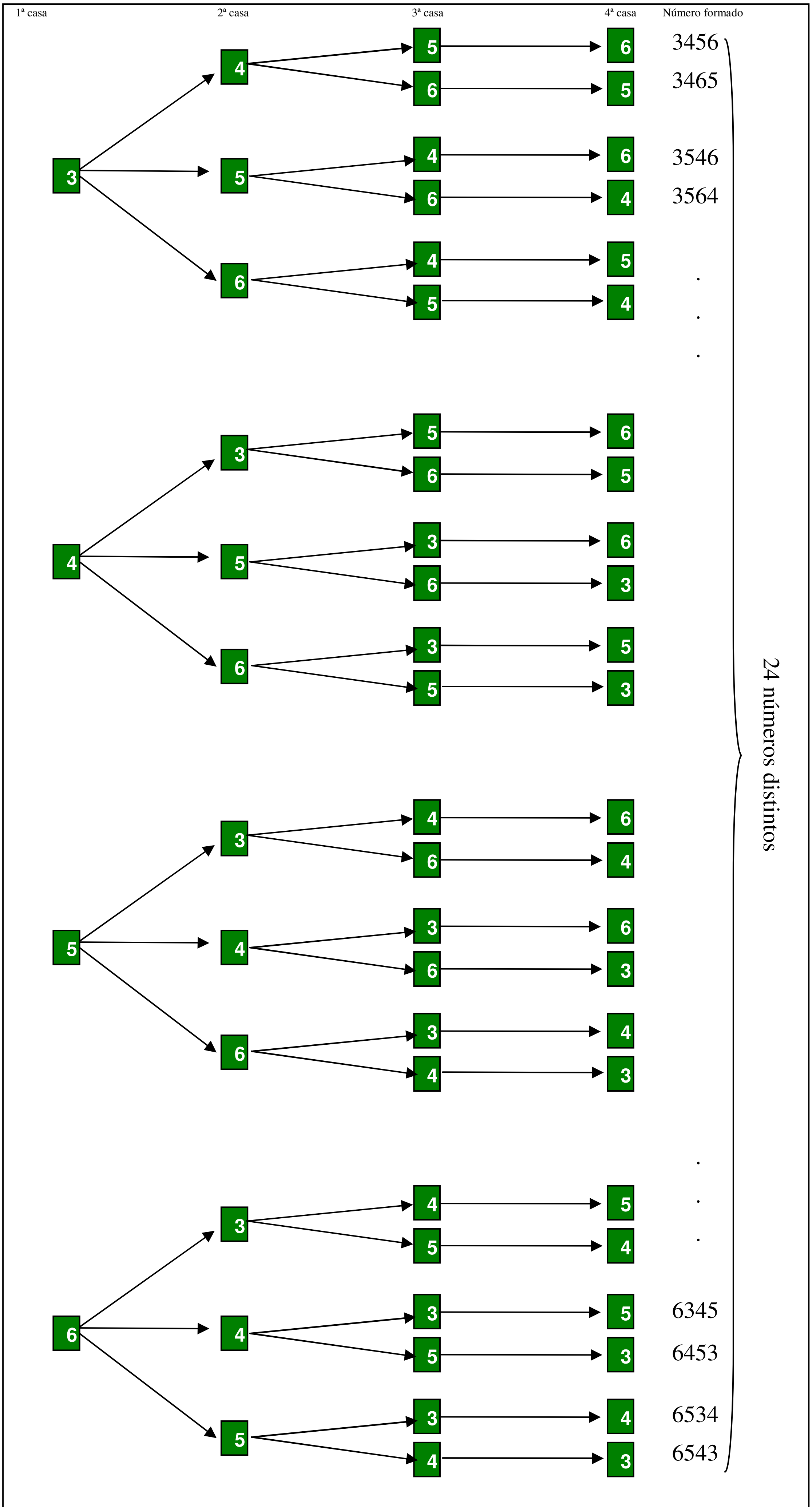
Exercícios resolvidos – Questões de vestibulares

1. Quantos números de 4 algarismos podemos formar utilizando, uma única vez, os numerais 3, 4, 5 e 6 ?

Resolução:
Como quereremos formar números com quatro algarismos teremos que preencher quatro casas com 3, 4, 5 e 6.
Repare:

$$\underbrace{\overline{\;1^a\;}\quad \overline{\;2^a\;}\quad \overline{\;3^a\;}\quad \overline{\;4^a\;}}_{\text{casas}}$$

Para a primeira casa temos 4 algarismos para preenchê-la. Já para a segunda, como os algarismos podem aparecer uma única vez e já utilizamos um para a primeira, restam 3 algarismos. Pelo mesmo raciocínio, na terceira restarão 2 e para a quarta e última casa 1 algarismo. Vamos usar o diagrama da árvore como solução.


1ª casa
2ª casa
3ª casa
4ª casa
Número formado
3456
3465
3546
3564
6345
6453
6534
6543
24 números distintos

Com o diagrama verificamos que podemos formar 24 números com os algarismos 3,4,5 e 6. Entretanto esse resultado pode ser obtido facilmente pelo princípio multiplicativo.

Na primeira casa temos 4 opções de escolha, na segunda 3 opções, na terceira 2 opções, na quarta e última 1 opção. observe

$$\underbrace{\underset{4}{\overline{\;1^a\;}}\quad \underset{3}{\overline{\;2^a\;}}\quad \underset{2}{\overline{\;3^a\;}}\quad \underset{1}{\overline{\;4^a\;}}}_{\text{opções}}$$

Finalmente, multiplicamos esses valores 4 • 3 • 2 • 1 = 24 números diferentes.

2) Quantos números de quatro algarismos podemos formar com 3, 4, 5 e 7?

Resolução:
Diferentemente do enunciado do exercício 1, esse enunciado não exige que utilizemos os algarismos uma única vez. Desse modo números tais como 2222, 3344 ou 1555 podem ser contabilizados em nossa contagem, o que anteriormente não era permitido. Desse modo teremos:

$$\underbrace{\underset{4}{\overline{\;1^a\;}}\quad \underset{4}{\overline{\;2^a\;}}\quad \underset{4}{\overline{\;3^a\;}}\quad \underset{4}{\overline{\;4^a\;}}}_{\text{opções}}$$

Isto é, podemos formar 4 x 4 x 4 x 4 = 4^4 = 256 números distintos. Se utilizássemos o diagrama da árvore (aqui não indicado pela extensão exagerada), essa árvore apresentaria 256 galhos terminais que representaria cada número formado. (Quem não visualizou que podemos formar 256 números pode tentar fazer o diagrama para notar o resultado, mas novamente, o resultado será imenso).

3) Quantos números de três algarismos formam-se com 0, 1, 2, 3, 4 e 5?

Resolução: o raciocínio é praticamente idêntico ao anterior, mas com uma sutil diferença. Observe:

$$\underbrace{\underset{6}{\overline{\;1^a\;}}\quad \underset{6}{\overline{\;2^a\;}}\quad \underset{6}{\overline{\;3^a\;}}}_{\text{opções}}$$

Esse raciocínio parece perfeito, mas esconde um erro, qual?
O problema é justamente o seguinte: Se considerarmos que para a primeira casa há 6 opções de escolha estaremos cometendo um erro, o de considerar um número tal como 012 como sendo um número de três algarismos. Na verdade sabemos que 012 é um número de dois algarismos. Desse modo para corrigirmos nosso raciocínio devemos para primeira casa dispor cinco opções de escolha que são os seis algarismos disponíveis menos o Zero, observe:

$\overline{\;1^a\;}$	$\overline{\;2^a\;}$	$\overline{\;3^a\;}$
↑	↑	↑
1,2,3,4ou5 5 opções	0,1,2,3,4ou5 6 opções	0,1,2,3,4ou5 6 opções

Finalmente teremos 5 x 6 x 6 = 5 x 6^2 = 180 números distintos.

4) Quantos números de três algarismos distintos podem-se formar com 0, 3 e 6?

Cuidado!... Na primeira casa não se pode usar o algarismo 0. Desse modo para a primeira temos 2 opções de escolha. Já para a segunda também temos duas opções de escolha, uma vez que na segunda o 0 pode aparecer, mas o algarismo usado na primeira casa não pode ser usado novamente. Os algarismos devem ser distintos. Para a terceira e última casa tem-se uma opção de escolha. Desse modo, fica:

2	2	1
1ª	2ª	3ª
3 ou 6 zero não! 2 opções	0 ou (algum que não foi usado na primeira posição) 2 opções	resta apenas um algarismo 1 opção

Finalmente, temos 2 x 2 x 1 = 4 números distintos.

5) Quantos números pares de quatro algarismos distintos podem-se formar com 0, 1, 2, 5, 6, 8 e 9 ?

Resolução:

A atenção, nesse exercício, deve ser redobrada pelo fato do número formando ter de ser par, isto é, 231 é um número ruim e 234 é um número bom para nossa contagem. 434 também é um número ruim e não deve ser incluído em nossa contagem. Apesar de ser par contém algarismos repetidos, contrariando a restrição acima (algarismos distintos).

Vamos começar então dirigindo toda a atenção a última casa da direita, pois sabemos que quando ela contém um algarismo par todo o número será par. Observe

1ª	2ª	3ª	4ª

Existem quatro opções para a escolha, são elas: 0, 2, 6 ou 8.

Assim poderíamos concluir rapidamente que podemos obter 4 (4ª casa) x 6 (3ª casa) x 5 (2ª casa) x 4 (1ª casa) que é igual a 4 x 6 x 5 x 4 = 480 números pares.

No entanto, esse raciocínio é falso, por quê ?

O problema esta novamente com o zero! Imagine se por um acaso escolhemos o zero para a última posição. Dessa forma o número seria um par e não começaria com o zero, já que ele ficou na última casa. Se por outro lado, não escolhemos o zero para a última casa criamos, sem intenção, uma dificuldade. Se não aparecer na última casa, o zero não pode aparecer na primeira. Números tais como 0124 são ruins. Desse modo devemos garantir que o zero não apareça na primeira casa. Esse foi o erro do raciocínio anterior. Não garantimos que o zero não apareceria na primeira casa.

Para contornar essa situação vamos dividir esse problema em casos. Isto é, em dois eventos diferentes. Observe:

Como temos que ter atenção redobrada com o zero, consideremos os casos:
1º caso: Números pares terminados em zero;
2º caso: Números pares não terminados em zero.
Desse modo não deixaremos de contar nenhum número e nem contaremos a mais.

Vamos aos cálculos

1º caso: Com o zero na última casa

0

___ ___ ___ ___

1ª 2ª 3ª 4ª

$\boxed{\text{Só pode o zero}}$

Desse modo teremos 1 opção para a quarta casa (pois só o zero pode), 6 opções para a terceira casa (pode qualquer um menos o zero), 5 opções para a segunda casa (não pode o zero nem o utilizado na terceira cada), 4 opções para a primeira casa (só pode os não utilizados anteriormente).
Assim teremos formados 1 x 6 x 5 x 4 números pares terminados em zero.

2º caso: Sem o zero na última casa

$\neq 0$

___ ___ ___ ___

1ª 2ª 3ª 4ª

$\boxed{\text{não pode o zero}}$

Assim na última casa há 3 opções de escolha (todos algarismos pares menos o zero). Agora vamos para a segunda casa problemática – a primeira – nela não se pode inserir nem o algarismo utilizado na última casa nem o zero. Assim teremos 5 opções. Terminando: na segunda 5 opções (nem o utilizado na última nem primeira casa. Zero, nessa casa pode), na terceira 4 opções (qualquer algarismo menos os utilizados anteriormente).
Desse modo fica 3 x 5 x 5 x 4 números pares que não terminam em zero.

Finalmente para sabermos quantos números pares podemos formar basta somarmos os resultados do 1º e 2º caso. Teremos:

1 x 6 x 5 x 4 + 3 x 5 x 5 x 4 = 120 + 300 = 420 números pares de quatro algarismos distintos.

6) (FJP) Leia atentamente este quadro:

1	**2**	**3**	**4**
Caros colegas,	a execução deste projeto	nos obriga à análise	das nossas opções de desenvolvimento no futuro.
Por outro lado,	a complexidade dos estudos efetuados	cumpre um papel essencial na formulação	das nossas metas finan-ceiras e administrativas.
Assim mesmo	a expansão de nossa atividade	exige a precisão e a definição	dos conceitos de participação geral.
Não podemos esquecer que	a atual estrutura da organização	auxilia a preparação e a estruturação	das atitudes e das atribuições da diretoria.
Do mesmo modo,	o novo modelo estrutural aqui preconizado	contribui para a correta determinação	das novas proposições.
A prática mostra que	o desenvolvimento de formas distintas de atuação	assume importantes posições na definição	das opções básicas para o sucesso do programa.
Nunca é demais insistir, uma vez que	a constante divulgação das informações	facilita a definição	do nosso sistema de formação dos quadros.
A experiência mostra que	a consolidação das estruturas	prejudica a percepção da importância	das condições apropria-das para os negócios.
É fundamental ressaltar que	a análise dos diversos resultados	oferece uma boa oportu-nidade de verificação	dos índices pretendidos.
O incentivo ao avanço tecnológico, assim como	o início do programa de formação de atitudes	acarreta um processo de reformulação	das formas de ação.

FONTOURA, Walter: Citado por Gaspari, Elio, Estado de Minas, Belo Horizonte, 28 junho 1998

Esse quadro contém o “Guia de discurso para tecnocratas principiantes”. Segundo o autor, basta combinar qualquer expressão da primeira coluna com expressões das outras colunas, observando sempre a ordem **1**, **2**, **3** e **4** para se falar durante um certo tempo, embora sem se dizer absolutamente nada.

Suponha que sejam necessários 12 segundos, em média, para se proferir cada combinação possível dessas expressões.

Nesse caso, um tecnocrata “enganador” poderá fazer um discurso “vazio” durante

a) 4 horas. b) 10 horas. c) menos de 30 horas. d) mais de 30 horas.

Resolução:

Para resolvermos essa questão basta lançarmos mão de principio multiplicativo, já que devemos primeiro escolher a primeira frase disponível dentre as dez do tipo 1 e depois a segunda do tipo 2 e depois a terceira do tipo 3 e finalmente a quarta do tipo 4.
Desse modo, encontraremos o produto:

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10000$$

número de possibilidades para a primeira frase	número de possibilidades para a segunda frase	número de possibilidades para a terceira frase	número de possibilidades para a quarta frase

Isto é, combinando as frases pode-se obter 10000 discursos diferentes.

Num segundo momento a questão relata que são necessários 12 segundo para proferir cada discurso. Como podemos formar 10000 diferentes, qual será o tempo necessário para externar todos eles. Para achar esse tempo basta multiplicar o número de discursos pelo tempo de cada um, assim:

10000 x 12 = 120 000 segundos

120 000 segundos equivale a (120 000 / 60) minutos, isto é, 2000 minutos. Por sua vez 2000 minutos equivale a (2000 / 60) horas que é igual a 33,333... horas. Portanto são necessários mais que 30 horas.

Esse tempo encontrado equivale a resposta de letra D.

Para você resolver

1) Com os 10 algarismos que dispomos {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} responda as perguntas:

a) Quantos números naturais de cinco algarismos podem-se formar?
b) Quantos números naturais de cinco algarismos distintos podem-se formar?
c) Quantos números naturais de 6 algarismos podem-se formar começando com 1,2 e 3 em qualquer ordem?
d) Quantos números naturais podem-se formar, com no máximo cinco algarismos distintos?
e) Qual o número máximo de linhas telefônicas uma companhia da área pode fornecer aos moradores de uma cidade cujo código inicial da cidade é 3523 seguidos de 4 dígitos?
f) Nessa mesma cidade quantos telefones têm os quatro últimos dígitos iguais? E diferentes entre si?
g) Quantos números de quatro dígitos distintos, exceto os das extremidades que devem ser iguais, podemos formar? . Ex: 3463, 1231, 4764, etc.
h) Quantos números naturais podem ser formados em forma de um palíndromo constituído de oito algarismos? Palíndromo é uma seqüência formada de modo que os elementos eqüidistantes dos extremos sejam iguais.Exemplo as palavras Ana; anilina; mussum; arara, mirim, mutum, radar, rotor, reter, rever,

iriri, somos; salas e os números 323; 121; 1221; 123321; 1234554321; 1234321. É interessante notar que palíndromos pode ser lidos da esquerda para a direita ou ao contrário e produzem o mesmo sentido.

i) Quantos números naturais em forma de um palíndromo constituído de oito algarismos podemos formar, de modo que esses números comecem com o algarismo 1(um)?
j) Quantos números naturais em forma de um palíndromo constituído de cinco algarismos podemos formar de modo que três desses algarismos sejam distintos?
k) Quantas palavras em forma de um palíndromo constituídas de dez letras podemos formar de modo que a terceira casa da direita seja uma vogal?(Considere o alfabeto latino com 23 letras)

2) Uma placa de um carro brasileira é uma seqüência de três letras seguidas de quatros algarismos (LETRA LETRA LETRA – ALGARISMO ALGARISMO ALGARISMO ALGARISMO). Dispõe-se 26 letras distintas e dez algarismos distintos para a confecção das placas. Assim responda:

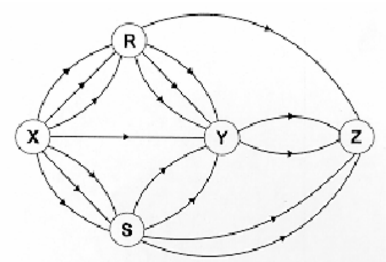
a) Quantas placas distintas podem ser confeccionadas?
b) Quantas placas com as três letras iguais podemos formar? Cuidado os algarismos podem ser iguais ou não.
c) Quantas placas formam-se, com as letras e com os algarismos, tipo palíndromo? Ex: BNB – 1221, ARA – 3553.
d) Quantas placas podem ser confeccionadas de modo que contenham apenas as vogais (a,e,i,o,u) e algarismos ímpares?
e) Quantas placas podem ser confeccionadas de modo que comece sempre com B e R nessa ordem?

3) Juliana vai almoçar e deve escolher um entre dois tipos de arroz, uma entre quatro tipos de salada e um entre três tipos de carne. De quantos modos diferentes pode elaborar sua refeição?

4) Numa agência de namoro existem 30 homens e 40 mulheres cadastradas a procura de um par. Mas, Algumas mulheres desistiram na última hora de buscar um par através dessa agencia. Mesmo assim o gerente observou que seria possível formar um casal de 750 maneiras diferentes com as mulheres restantes. Qual a quantidades de mulheres desistentes?

5) (UFMG) Observe o diagrama. O número de ligações distintas entre X e Z é:

a) 39
b) 41
c) 35
d) 45



6) Uma senhora dispõe de seis blusas, quatro saias e três sapatos. De quantos modos distintos ela pode se vestir?

7) (UFBA) Existem cinco ruas ligando os supermercados S_1 e S_2 e três ruas ligando S_2 e S_3. Para ir de S_1 a S_3, passando por S_2, o número de trajetos diferentes que podem ser utilizados é:
a) 15 b) 10 c) 8 d) 5 e) 3

8) (MACKENSE-adaptada) Se uma sala tem cinco portas, o número de maneiras distintas de se entrar nela por uma porta e sair por outra diferente é:
a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

9) Existem 3 linhas de ônibus ligando a cidade A à cidade B e 4 outras ligando B à cidade C. Uma pessoa deseja viajar de A à C, passando por B. Quantas linhas de ônibus diferentes poderá utilizar na viagem de ida e volta, sem usar duas vezes a mesma linha?
a) 144 b) 12 c) 24 d) 72 e) n.r.a.

10) (Taubaté) Cinco sinaleiros estão alinhados. Cada um tem três bandeiras: uma amarela, uma verde e uma vermelha. Os cinco sinaleiros levantam uma bandeira cada, ao mesmo tempo, transmitindo-se assim um sinal. Os números de sinais diferentes que se pode transmitir é:
a) 15 b) 125 c) 243 d) 1215

11) Dez times participam de um campeonato de futebol. De quantas formas se podem ter os três primeiros colocados?

12) (FUVEST) Calcule quantos números múltiplos de 3, de quatro algarismos distintos, podem ser formados com 2, 3, 4, 6 e 9.

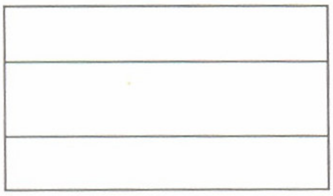
13) (FUVEST) Considere todas as trinta e duas seqüências, com cinco elementos cada uma, que podem ser formadas com os algarismos 0 e 1. Quantas dessas seqüências possuem *pelo menos* três zeros em posições consecutivas?

a) 3 b) 5 c) 8 d) 12 e) 16

14) De quantos modos possíveis pode-se formar um produto de dois números naturais maiores que 1 que resulte em:

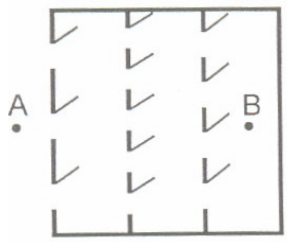
a)16 b) 14 c) 64 d) 128

15) (FCMMG) Observe a figura. Nessa figura está representada uma bandeira que deve ser pintada com duas cores diferentes, de modo que a faixa do meio tenha cor diferente das outras duas faixas. O número de maneiras distintas de pintar a bandeira desse modo, utilizando as cores azul, preta, vermelha,
amarela, verde e branca é:



A) 15
B) 30
C) 45
D) 60

16) (FCMMG) Observe a figura. Nela está representada a planta de um cômodo contendo 3 portas na primeira parede, 5 na segunda e 4 na terceira. Uma pessoa deseja chegar ao ponto B, partindo do ponto A, passando exatamente por três das portas indicadas na figura. O número de maneiras distintas que ela pode fazer isso é
A)11
B)23
C)32
D)60



17) (PUC-Campinas) Usando os algarismos 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9, sem repetição, quantos números pares de três algarismos distintos e maiores que 234 pode-se formar?

A) 110 B) 119 C) 125 D) 129 E) 132

18) (UFMG) O total de números inteiros, com todos os algarismos distintos, compreendidos entre 11 e 1000, é:
a) 576 b) 648 c) 728 d) 738

19) (UFMG) O número de múltiplos de 10, compreendidos entre 100 e 9999 e com todos os algarismos distintos, é:
a) 250 b) 321 c) 504 d) 576

20) (PUC) O quantidade de números de três algarismos maiores que 500, que podem ser formados com os algarismos 3,5,6,7 e 9, com repetição, é igual a:
a) 10 b) 20 c) 48 d) 64 e) 100

21) (UFMG) Numa cidade A, os números de telefones têm sete algarismos, sendo que os três primeiros constituem o prefixo da cidade. Os telefones que **terminam em 10** são reservados para farmácias e os que os **dois últimos algarismos** são iguais, para médicos e hospitais. A quantidade dos demais números de telefones disponíveis na cidade A é:
a) 1650 b) 2100 c) 4800 d) 8900 e) 9000

22) (UFMG) Considere formados e dispostos em ordem crescente todos os números que se obtém permutando os algarismos 1,3,5,7 e 9 .O número 75391 ocupa, nessa posição, o lugar:
A) 21°   B) 64°   C) 88°   D) 92º   E) 120°

3 - Permutações

3.1 - Permutações simples

Permutações simples é uma técnica combinatória utilizada quando desejamos contar as possibilidades formação de uma fila ou seqüência em que não há repetição de elementos e todos esses elementos são utilizados no problema.

Por exemplo, com os algarismos 1, 2 e 3, quantos números de três algarismos distintos (isto é, sem repetição) podemos formar?

Formar números, em primeira análise, nada mais é do que ordenar algarismos em fila. Desse modo, a resposta, como vimos no princípio multiplicativo é 3 x 2 x 1 = 6 números, pois, não houve repetição de algarismos. Caso a repetição fosse permitida teríamos como formar 3 x 3 x 3 = 27 números, pois números como 222 anteriormente não permitidos foram, nesse ultimo caso, liberados em aparecer na contagem.
Outro exemplo de contagem no qual lançamos mão da ferramenta permutação simples é a contagem do número de anagramas que podem ser formados com alguma palavra.
Anagrama é um processo de troca de ordem das letras de uma palavra com o intuito de formar uma nova palavra (esta palavra formada pode ter sentido ou não). Por exemplo, da palavra **roma** vem o anagrama **amor.** A palavra TRAPO pode formar os anagramas:

PRATO

RAPTO

PARTO

PORTA

TROPA

TRPAO

POTRA

...

...

...

Esses são apenas alguns dos anagramas que podemos formar. Repare que alguns fazem sentido outros não.
Imagine agora que você tem a missão de contar todos os anagramas da palavra Trapo.
Uma das maneiras de realizar essa tarefa é listar, como vinha sendo feito anteriormente, todos os anagramas da palavra trapo e em seguida contar a dedo todos eles. Mas com certeza esse processo não é uma boa técnica, já que o número de anagramas vai ser relativamente alto. Como não podemos repetir as letras da palavra e todas as letras devem ser utilizadas uma boa técnica de contagem é o uso das permutações simples. Observe:

1º) A palavra TRAPO contém 5 letras. Dispostas da esquerda para a direita são cinco posições as quais uma letra de cada vez preenche cada posição:

___	___	___	___	___
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª

Por exemplo, no anagrama RAPTO a letra R ocupou a primeira, A a segunda, P a terceira, T a quarta e O a quinta e última posição.
Resta agora, depois do exposto acima verificar quantas possibilidades de escolha dispomos para a 1ª posição, para a 2ª e assim sucessivamente.

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
5	4	3	2	1

Para a escolha de uma letra para a 1ª posição temos cinco letras disponíveis. Optaremos por uma. Desse modo restarão quatro letras disponíveis para a escolha da letra da 2ª posição. Optaremos por uma outra letra. Para a terceira haverá três opções. Para a quarta duas. E para a quinta e última uma opção. Finalmente devemos multiplicar esses valores encontrados:

5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 anagramas da palavra trapo.

Como foi mencionada a listagem de todos os anagramas é inviável devido ao numero elevado.

É importante notar que no exemplo dos números encontramos como resposta o produto 3 x 2 x 1 e nesse último também obtivemos um produto do mesmo tipo $\Rightarrow$ 5 x 4 x 3 x 2 x 1. Esse é um importante resultado em combinatória. Em problemas que a ferramenta permutações simples for utilizada encontraremos resultados como os acima.
Para generalizar, toda vez que tivermos com a missão de dispor objetos distintos em ordem, em fila, isto é, formar uma seqüência, estaremos utilizando permutações simples, observe:

Exemplos:

1) De quantos modos distintos podemos formar uma fila com 3 pessoas?

Resolução:
A resposta, depois de todas as considerações anteriores, é imediata:

3 x 2 x 1 = 6 filas

___	___	___
3	2	1

2) De quantos modos diferentes podemos dispor 5 pessoas em fila?

Resolução:
Pelo mesmo raciocínio: 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 modos ou filas diferentes.

3) De quantos modos diferentes podemos formar uma fila com 15 pessoas?

Resolução:
Da mesma Forma: 15 x 14 x 13 x 12 x 11 x 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 1 307 674 268 000 filas.

4) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra MAGNÉTICO? O acento sempre acompanhará o E.

Resolução:
Resposta: 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 362 880 anagramas.

Podemos notar nos quatro exemplos acima que sempre multiplicamos um número natural pelos seus antecessores até o 1. Isto é, pegamos um número e sempre o multiplicamos pelo que tem uma unidade a menos do que ele, em seguida por outro que tem duas unidades a menos do que ele e assim sucessivamente até chegarmos no 1. Por exemplo

9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1, pode ser rescrito assim:

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

9 x (9 -1) x (9-2) x (9-3) x (9-4) x (9-5) x (9-6) x (9-7) x (9-8)

Esse processo utilizado em permutações simples, o de multiplicar um número pelos seus antecessores até o 1 é chamado fatorial e tem um símbolo para representar que o produto é do tipo fatorial. O produto
9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 é um fatorial e pode ser reescrito como 9!, o sinal (!) indica esse produto.
Da mesma forma o produto **15 x 14 x 13 x 12 x 11 x 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1** é igual a **15!**. Com essa linguagem resumimos o produto, pois, basta indicar onde esse produto começa (15) e que é fatorial (!).
Identicamente **5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 5!** e **3 x 2 x 1 = 3!.**
É uma boa nomenclatura, muito pratica. Imagine a seguinte situação combinatória. Você está encarregado de dispor em fila cinco mil pessoas. De quantos modos pode realizar essa tarefa. A resposta como vimos nos exemplos acima sobre filas é igual a

5000 x 4999 x 4998 x 4997 x 4996 x ... x 5 x 4 x 3 x 2 x 1,

segue esse produto de antecessores do 5000 até que se chegue no 1. Desse modo podemos resumir esse resultado com a linguagem fatorial. Assim, fica simplesmente **5000! (cinco mil fatorial).**

Para generalizar se devemos dispor n objetos em fila teremos n! (n fatorial) maneiras distintas de dispormos esses n objetos, Simbolizaremos assim: $P_n = n!$

Para terminar quanto vale **1!** e **0!**?

1! = 1 Podemos pensar combinatoriamente e nos indagarmos sobre a quantidade de maneiras de dispormos (1) objeto em fila. Existe uma única maneira. Dessa forma 1! = 1

0! = 1 Podemos pensar, utilizando combinatória, de quantos modos podemos colocar 0 (zero) objetos em fila. Esta resposta é polêmica, mas é bem aceitável. Como não há objetos podemos realizar esse ato de **uma maneira** - não construindo a fila. Quem pensou que 0! = 0 não cometeu um erro, pois provavelmente imaginou que não há nenhuma fila a ser construída. Dessa forma, devemos ter em mente que 0! = 1 é uma convenção. Daqui em diante consideraremos 0! = 1 e não igual a zero, pois considerando a primeira alternativa evitamos problemas posteriores.

Novamente, a ferramenta permutações simples deve ser utilizada para contar as possibilidades de formação de uma fila (ou seqüência) quando não houver elementos repetidos e forem utilizados todos os

elementos em questão. Se quiséssemos, por exemplo, contar os anagramas da palavra AMIZADE não poderíamos utilizar tal ferramenta, pois a letra A aparece repetida duas vezes. Portanto elemento repetido. Outro exemplo em que o uso de permutações simples é indevido seria, por exemplo, formar números de três algarismos distintos utilizando 3, 4, 5, 6. Uma vez que só utilizaríamos três algarismos e dispomos de quatro. Dessa forma não utilizaríamos todos os elementos fornecidos.

Exercícios resolvidos – Questões de vestibulares

A partir da palavra **NÚMEROS** (o acento sempre acompanhará a letra u), responda:

a) Quantos anagramas são possíveis de serem formados?
b) Quantos anagramas têm como primeira letra uma vogal?
c) Quantos anagramas começam e terminam em vogal?
d) Quantos anagramas começam com n?
e) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras n e u juntas e nessa ordem?
f) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras u e n juntas?
g) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras n, u e m juntas e nessa ordem?
h) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras n, u e m juntas?

Resolução:

a) Quantos anagramas são possíveis de serem formados?

Resolução:

A palavra NÚMEROS tem 7 letras, desse modo devemos formar uma seqüência com essas 7 letras, pode realizar esse processo de P_7 maneiras distintas, que é igual a $P_7 = 7!$ anagramas distintos.

b) Quantos anagramas têm como primeira letra uma vogal?

Resolução:

Nesse item devemos preencher sete posições com sete letras e garantir que qualquer anagrama formado tenha uma vogal como primeira letra. Assim devemos começar pela primeira casa, onde há a restrição, observe:

$$3 \quad \underbrace{6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1}$$

1ª casa: temos que optar entre ú;e;o.

Nas demais casas podemos inserir vogais ou consoante, menos a vogal utilizada na primeira casa. Por isso começamos com 6 opções.

Desse modo nossa resposta será: $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 6! = 3 \cdot P_6$ anagramas distintos

c) Quantos anagramas começam e terminam em vogal?

Resolução:

O raciocínio para resolver esse item é idêntico ao anterior, mas nesse temos que garantir que a primeira e última casa contenham vogais, assim primeiro preencheremos a primeira e última casa, em seguida as demais, observe:

$$3 \quad \underbrace{5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1} \quad 2$$

1ª casa: temos que optar entre três vogais.

Nas demais casas podemos inserir vogais ou consoante, menos as vogais utilizadas na primeira e última casa respectivamente. Por isso começamos com 5 opções.

última casa: temos que optar entre duas vogais. Já utilizamos uma na 1ª casa

Desse modo nossa resposta será: $3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 2 \cdot 5! = 6 \cdot P_5$ anagramas distintos

d) Quantos anagramas começam com n?

Resolução:

Devemos garantir que a primeira letra da palavra formada seja n, assim primeiro preenchemos a primeira casa com o n e em seguida as restantes com as seis que faltam, observe:

1	6	5	4	3	2	1

1ª casa: temos que garantir a letra n. Assim teremos 1 opção.

Nas demais casas podemos inserir qualquer letra menos n, utilizada na primeira casa. Por isso começamos com 6 opções.

Desse modo nossa resposta será: $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = P_6$ anagramas distintos

e) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras n e u juntas e nessa ordem?

Resolução:

Como as letras n e u devem aparecer juntas e nessa ordem, trataremos de forma artificial as duas como uma só letra, assim $\boxed{\text{nu}}$ será uma única letra.

	nu				

Já que a palavra números tem 7 letras com essa maquiagem nas duas letras essa palavra passará a ter 6 letras e a quantidade de anagramas de uma palavra de 6 letras é $P_6 = 6!$

f) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras u e n juntas?

Resolução:

Nesse item devemos proceder de forma idêntica ao anterior com a diferença que agora u e n podem aparecer em qualquer ordem. Assim primeiro contamos a quantidade de permutações com as 6 letras hipotéticas - temos 6! maneiras de fazer isso. Em seguida devemos ordenar u e n, podemos fazer isso de 2!= 2 maneiras diferentes, para finalizar devemos multiplicar os resultados para obter:

$$6! \cdot 2!$$

dispor 6 letras hipoteticamente

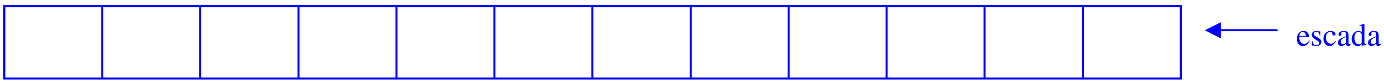
ordenar as letras u e n

As letras g e h serão deixadas para você resolver.

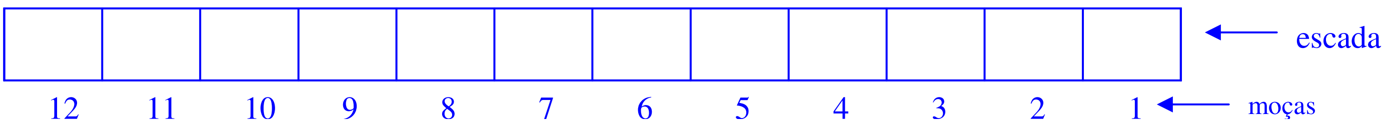
2) De quantas maneiras podemos dispor 12 moças e 12 rapazes em uma escada com 12 degraus de modo que se forme um casal em cada degrau?

Resolução:

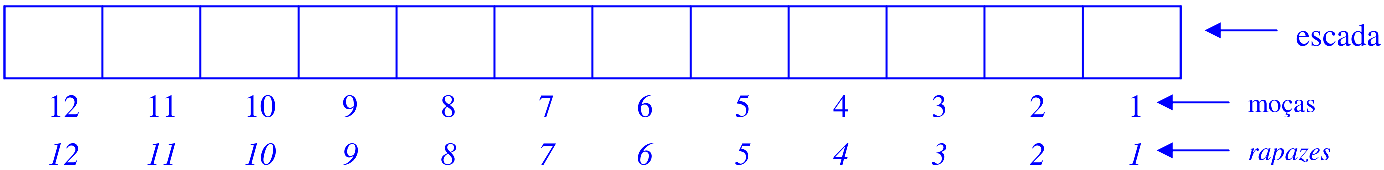
Primeiro vamos desenhar uma figura ilustrativa



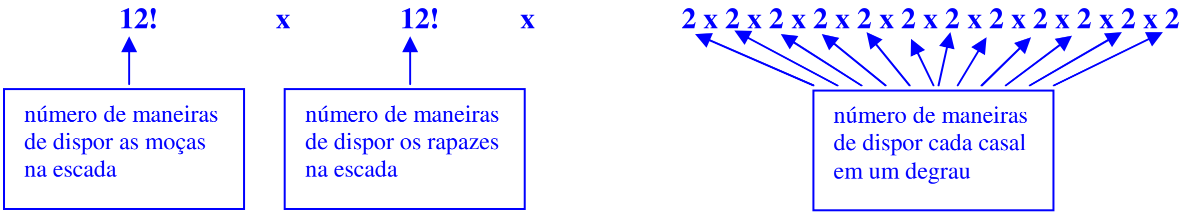
Devemos, em seguida, dispor as doze moças, uma em cada degrau. Podemos fazer isso de 12! maneiras, observe



Agora devemos acomodar os rapazes, podemos acomodá-los de 12! maneiras. Acompanhe:



Para terminar devemos observar que tanto a moça ou rapaz que se encontram em cada degrau podem ocupar o lado direito da escada. Isto é, numa situação a moça pode estar do lado direito da escada o rapaz do lado esquerdo, ou vice e versa. Desse modo podemos ordenar cada casal de 2 maneiras em cada degrau, como temos 5 casais,a resposta final fica assim:



Podemos resumir essa resposta assim: $12!\cdot 12!\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^{12}\cdot(12!)^2$ modos diferentes de dispor 12 casais em 12 degraus de uma escada.

Para você resolver

23) Considere a palavra VESTIBULAR

A) Quantas Permutacões podemos formar?

B) Quantos anagramas começam por VES?

C) Em quantos anagramas as letras V, E e S estão juntas e nesta ordem?

D) Em quantos anagramas as letras V, E e S estão juntas?

E) Quantos anagramas começam e terminam por vogal?

F) Quantos anagramas começam por consoante e terminam por vogal?

G) Quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoante?

H) Quantos anagramas começam por vogal ou terminam por consoante?

24) De quantas maneiras podemos formar uma fila com:

a) 5 pessoas?

b) 10 pessoas?

c) 15 pessoas com um casal sempre juntos?
d) 15 pessoas com um casal sempre juntos e a esposa antes do marido?
e)10 pessoas com 2 casais e cada casal sempre juntos?
f)10 pessoas com 2 casais e cada casal sempre juntos e as esposas na frente dos maridos?
g) 70 bonecos diferentes?
h) 70 bonecos diferentes com os 10 que vestem vermelho sempre na frente dos bonecos vestidos as demais cores?
i) 70 bonecos diferentes com os 10 que vestem vermelho sempre juntos?

25) Num varal de roupas linear com um só fio, deseja-se dispor 25 peças de roupas diferentes para secar. Dessa forma responda:
a) De quantas maneiras é possível realizar essa disposição?
b) De quantas maneiras é possível realizar essa disposição, de modo que as 10 calças fiquem sempre juntas?
c) De quantas maneiras é possível realizar essa disposição, de modo que nenhuma das 5 camisas fiquem nas extremidades do varal?

26) (U.F. STA. CATARINA) O número de anagramas da palavra ALUNO, em que as consoantes ficam na ordem LN e as vogais na ordem AUO ê:
a)20 b)120 c)10 d)60 e)40

27) (FEl) Obter o número de anagramas formados com as letras da palavra REPÚBLICA nos quais as vogais se mantém nas respectivas posições.

28) (FUVEST) O número de anagramas da palavra FUVEST que começam e terminam por vogal é:
a) 24 b) 48 c) 96 d)120 e)144

29) (UNIV. FED. BAHIA) Quatro jogadores saíram de Manaus para um campeonato em Porto Alegre, num carro de 4 lugares. Dividiram o trajeto em 4 partes e aceitaram que cada um dirigiria uma vez. Combinaram também que, toda vez que houvesse mudança de motorista, todos deveriam trocar de lugar. O número de arrumações possíveis dos 4 jogadores, durante toda a viagem, é:
A) 4 B) 8 C) 12 D) 24 E) 162

30) (S.J. CAMPOS) De quantos modos diferentes podemos dispor as letras da palavra VESTIBULAR, de modo que as vogais e as consoantes apareçam juntas, em qualquer ordem?

31) (VIÇOSA) Seis pessoas em fila gastam 10 segundos para mudarem de ordem. O tempo necessário para todas as mudanças possíveis é:
A) 4h B) 2h C) 3h D) 5h E) 6h

32) Um garçon anotou as encomendas de 4 frequeses. Cada um pediu uma sopa, um prato principal, uma bebida e uma sobremesa. O garçon não anotou quais clientes pediram quais encomendas, lembrando-se apenas que cada um pediu uma sopa diferente, um prato principal diferente, uma bebida diferente e uma sobremesa diferente. De quantas maneiras diferentes ele poderá distribuir os pedidos entre os 4 clientes?
a) $(4!)^4$ b) 4 x 4! c) 4! x 4! d) 4^{16} e) $\frac{16!}{4!\cdot 4!}$

33) (MACK) Um trem de passageiros é constituido de única locomotiva e seis vagões distintos, sendo um deles restaurante, Sabendo que a locomotiva deve ir à frente e que o vagâo restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, o número de modos diferentes de montar a composição é:
A) 120 B) 320 C) 500 D)600 E) 720

34) (UNIV. CAT. PELOTAS) Uma família com 5 pessoas possui um automóvel de 5 lugares. Se apenas uma pessoa dirige, o número de modos que podem se acomodar no carro para uma viagem é:
A) 6 B)120 C) 36 D) 24 E) n.d.a.

35) (SÃO CARLOS) Quatro rapazes e uma moça formam uma fila. De quantas maneiras esta fila pode ser formada de modo que a moça fique sempre em 1º lugar?
A)24 B)12 C)18 D) 4 E) 6

36) (ENO. DE ALIMENTOS_BARRETOS) Tem-se 12 livros, todos diferentes, sendo 5 de Matemática 4 de Física e 3 de Química. De quantos modos podemos dispô-los sobre urna prateleira devendo os livros de cada assunto permanecer juntos?
A)103 680 B)17 280 C) 150 D)12 E) 6

37) (IME-adaptada) 5 rapazes e 5 moças devem posar para fotografia, ocupando uma escada com 5 degraus de forma que em cada degrau fique um rapaz e uma moça. De quantas maneiras diferentes podemos arrumar esse grupo?
A) 70 400 B) 128 000 C) 460 800 D) 332 000 E) 625

38) (FESP) Qual é a soma dos números que se pode formar com as permutações dos algarismos 0, 1, 2 e 3?
A) 36 996 B) 38 996 C) 34 996 D) 34 992 E) 39 996

3.2 - Permutação com repetição (Assunto opcional - somente segunda etapa vestibular UFMG)

Essa nova ferramenta, como o nome indica diferentemente das permutações simples, lida com elementos que se repetem. Isto é, busca formar filas ou seqüências com elementos repedidos. Vale a ressalva: todos os elementos em questão devem ser utilizados.
Tomemos como exemplo os possíveis anagramas com a palavra ANA. Vamos, a titulo de ilustração diferenciar os A,s que aparecem na palavra ANA. O primeiro será colocado em negrito. Então fica:
ANA. Desse modo os dois A,s se tornaram diferentes. Assim não temos mais uma palavra com elementos repetidos. Podemos, com essa nova palavra, formar 3 x 2 x1 = 3! = 6 anagramas diferentes, são eles:

ANA
AAN
AN**A**
N**A**A
NA**A**
A**A**N

Seis anagramas com os dois A,s ditos diferentes

Mas, na verdade, a diferenciação dos A,s é artificial. Ela não existe. Por exemplo, nos anagramas **A**AN e A**A**N são dois, mas sem a diferenciação dos A,s tornam-se idênticos. Observe: AAN e AAN. O mesmo acontece com **A**NA e AN**A** **;** N**A**A e NA**A** **.** Na verdade ao trocarmos os A,s de posição não formamos um novo anagrama. Assim ao invés de 6 temos 3 anagramas com a palavra ANA, pois contamos cada anagrama duas vezes que é o número de permutações com os A,s, isto é, 2!

Isso acontece porque ao permutarmos os A,s eles não geraram um novo anagrama.Assim houve uma duplicação do resultado e para acharmos a resposta correta temos que dividir o resultado 6 por 2! para encontrarmos a resposta correta.Observe: $\frac{3!}{2!}=\frac{6}{2}=3$. Indicaremos esse resultado por $P_3^{(2)}$, que quer dizer: permutação de 3 elementos com um deles aparecendo duas vezes.

O que temos que notar em combinatória é que em muitas situações é interessante, para se chegar a algum resultado verdadeiro, *contar coisas iguais como se diferentes fossem e posteriormente corrigir o resultado obtido indevidamente para se chegar a resposta correta (Morgado)*. Em ANA contamos anagramas iguais como se diferentes fossem. Como contamos cada um duas vezes duplicamos a resposta. Assim para contornarmos esse erro dividimos por 2, ou 2! a resposta errada para se chegar a resposta certa.

Vamos, agora, contar todas as seqüências formadas a partir da troca dos símbolos de XIII (treze em romanos). Como podemos notar o símbolo I aparece três vezes no número. Dessa forma contaremos o número de seqüências formadas com XIII como se os I,s fossem diferentes. Assim obteríamos 4!. No entanto sabemos que contamos seqüências iguais mais de uma vez. Na realidade contamos cada seqüência 6 ou 3! vezes. Assim para obtermos a resposta correta, basta dividirmos 4! por 3!. Obteremos:

$\mathrm{P}_4^3=\frac{4!}{3!}=\frac{4\cdot 3!}{3!}$ **Seqüências distintas**.

Outro exemplo: Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra ITATIAIA.

Nesse caso as letras A e I aparecem três vezes cada uma e a letra T duas vezes. Desse modo basta contar quantos anagramas existem se todas as letras fossem diferentes. Obteríamos 8!. E em seguida dividimos esse resultado pela quantidade de vezes que contamos indevidamente cada anagrama. A letra A fez cada anagrama repetir 3! vezes. O mesmo ocorreu com a letra I. Já a letra T fez cada anagrama repetir 2! vezes. Se achar necessário verifique que 3! é o número de vezes que contamos repetidamente cada anagrama em decorrência da letra A. Em seguida verifique os resultados das demais letras.

Finalmente a resposta correta é : $\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}$. Simbolizamos esse resultado assim: $P_8^{(3,3,2)}=\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}$

Você deve ter notado, com o exposto acima, que ao tentarmos contar o número de permutações com repetição de elementos devemos no numerador colocar o número que remete a quantidade de elementos na forma fatorial e em seguida dividir pelo produto fatorial da quantidade de elementos repetidos de cada tipo. **Para generalizar, o número de permutações com n elementos em que um deles aparece repetidamente a vezes, outro b vezes, outro c vezes e assim sucessivamente é dado por:**

$$p_n^{(a,b,c,d,e,\ldots)}=\frac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!\cdot d!\cdot e!\ldots}$$

Exercícios Resolvidos

1) Quantos anagramas distintos com as letras da palavra PINDAMOIANGABA podemos formar?

Resolução:

Como temos que utilizar todas as letras da palavra acima e algumas delas aparecem repetidas vezes, utilizaremos a ferramenta permutações com repetição.

Em PINDAMOIANGABA a letra A repete quatro vezes, as letras I e N aparecem cada uma duas vezes. Dessa forma teremos como resultado $P_{14}^{(4,2,2)} = \frac{14!}{4!\cdot 2!\cdot 2!}$

$$P_{14}^{(4,2,2)} = \frac{14!}{4!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot \cancel{10}\cdot 9\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\cdot \cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 908107200 \text{ ANAGRAMAS}$$

2) Quantos anagramas com a palavra ARARA?

Resolução:

Teremos como resultado $P_5^{(3,2)} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2\cdot 1} = 10$ anagramas distintos.

3) De quantos modos podemos dispor 15 objetos em fila sabendo que existem três tipos de objetos se repetem 2,3 e 4 vezes respectivamente.

Resolução:

Como dispomos de 15 objetos, mas alguns deles são repetidos, trata-se de um tipo de contagem no qual vale a pena utilizar a ferramenta permutações com repetição. Assim Obteremos:

$$P_{15}^{(2,3,4)} = \frac{15!}{2!\cdot 3!\cdot 4!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{4!}} = (15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 4\cdot 7\cdot 5) \text{ filas distintas}$$

4) De quantos modos podemos dispor uma equipe de sete garçons -com uniformes idênticos - em fila num restaurante sabendo que a três gêmeos idênticos nessa equipe. Observação: os gêmeos são indistinguíveis.

Resolução:

Como os três gêmeos são idênticos podemos dispor esse time em fila de $P_7^{(3)}$ maneiras distintas, que resulta em:

$$\frac{7!}{3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840$$

Para você resolver

39) Joãozinho tem uma coleção de oito soldados de plástico. Resolveu colocar todos em fila. Mas quando realizava tal processo observou que possuía um tipo de soldado repetido. Sabendo que Joãozinho pode formar, com sua coleção, 6720 filas distintas. Qual o número de soldados repetidos?

40) (MACK) Dentre os anagramas distintos que podemos formar com **n** letras, das quais duas são iguais, 120 apresentam estas duas letras iguais juntas. O valor de **n** é:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 122

41) (MACK) O número de maneiras diferentes de colocar em uma linha de um tabuleiro de xadrez (8 posições) as peças brancas (2 torres, 2 cavalos, 2 bispos, a rainha e o rei) é:

a) 8! b) 504 c) 5 040 d) 8 e) 4

42) Quantos são os anagramas de cada palavra, respectivamente:

a) URUGUAI	b) MATEMATICA	c) ITATIAIA	d) PINDAMOIANGABA
e) JURUAIA	f) ALPINOPOLIS	g) CACOFONIA	h) CRISTOVAN
i) TEIXEIRA	j) MISSISSIPI	k) ADRIANA	l) AMOEBA

43) Quantos números de 7 dígitos, maiores que 6 000 000, podem ser formados usando apenas os algarismos 1,1,1,1,3,3,6?

44) Quantos números de 6 dígitos podem ser formados usando apenas os algarismos 1,1,1,1,2 e 3?

45) O número de anagramas da palavra SERGIPE nos quais a primeira letra é E e a última também é E, são:
a) 5 b) 2520 c) 1680 d) 120

46) Usando apenas os algarismos 1,3,3,5 e 9, quantos números podemos formar maiores que 70 000?

47) Pedro dispõe de uma coleção de 40 bonés. Dentre eles existem, respectivamente sete, cinco e nove idênticos entre si. Deseja dispô-los em linha numa prateleira. De quantos modos distintos Pedro pode realizar esse processo?

3.3 - Permutações circulares (Assunto opcional - somente segunda etapa vestibular UFMG)

Permutações circulares é uma ferramenta intrinsecamente ligada à permutações simples. Difere dessa pelo fato de os elementos em questão estarem dispostos em fila circular, isto é, através de um circulo. Observe o exemplo:
De quantos modos podemos dispor as letras da palavra PRATO em um circulo em lugares equiespaçados (as letras deverão ter a mesma distancia entre elas). ?

Primeiro devemos imaginar um círculo e em seguida as letras da palavra em questão dispostas ao redor do círculo (figura 1).

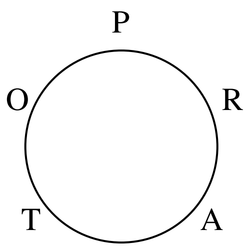


FIGURA 1

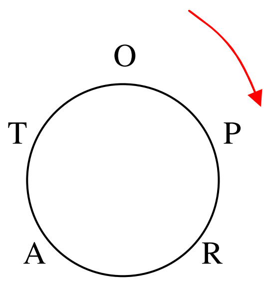


FIGURA 2

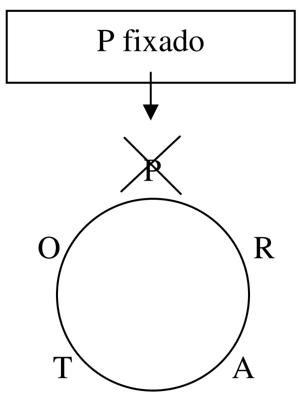


FIGURA 3

Se colocarmos o P no lugar de R, R no lugar de A, A no lugar de T, T no lugar de O e O no lugar de P, na verdade não criaremos uma nova fila circular, apesar de termos mudado todos os elementos de posição. O que ocorreu, de fato, foi apenas uma rotação entre os elementos, observe na figura 2.
Dessa forma, diferentemente do que acontece em uma fila linear, em uma fila circular a simples troca de posição dos elementos pode não formar uma nova fila. Como ocorreu acima. (O que fazer então?)
Para contornar essa situação devemos fixar um dos elementos de uma fila e em seguida permutar o restante de maneira idêntica a uma fila comum. Observe na figura 3 acima.
Com esse processo garantimos a não ocorrência de simples rotações e contamos todas as filas circulares com esses elementos. Já que ao fixarmos um elemento, “desmantelamos” a fila circular e criamos outra que se comporta como

uma fila linear. Finalmente, podemos dispor essas letras em uma fila circular de **4!** maneiras. Uma vez que fixamos o P e permutamos os elementos restantes como se estivéssemos formando uma fila comum.

Note que **4!** é justamente **(5 -1)!** 5 é a quantidade de elementos envolvidos na questão menos 1 que é o elemento fixado ou travado, para garantir a contagem de todas as permutações circulares.

Veja esses novos exemplos:

1) De quantos modos podemos dispor dez crianças em uma roda de ciranda?
Ciranda é uma brincadeira em que as crianças são dispostas em uma fila circular. Assim para Garantir que simplesmente façamos uma rotação com as crianças devemos fixar uma delas. Em seguida permutamos as nove restantes como se tivemos dispondo-as em uma fila comum. Assim podemos obter 9! rodas de ciranda distintas que equivale a (10 -1)! .
2) De quantos modos podemos dispor circularmente 30 objetos diferentes em uma fila?
A resposta a essa altura deve ser imediata. (30 -1)! maneiras distintas.

Para generalizar se possuímos n elementos distintos para dispormos em uma fila circular e de forma eqüidistante podemos realizar esse processo de **(n – 1)!** maneiras distintas. Simbolizamos por $\mathbf{(PC)_n}$. Dessa forma

$$(PC)_n = (n - 1)!$$

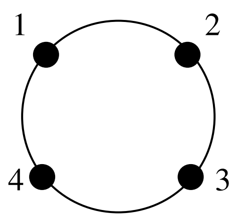
Exercícios Resolvidos

1) De quantos modos podemos dispor n crianças em uma roda de ciranda?

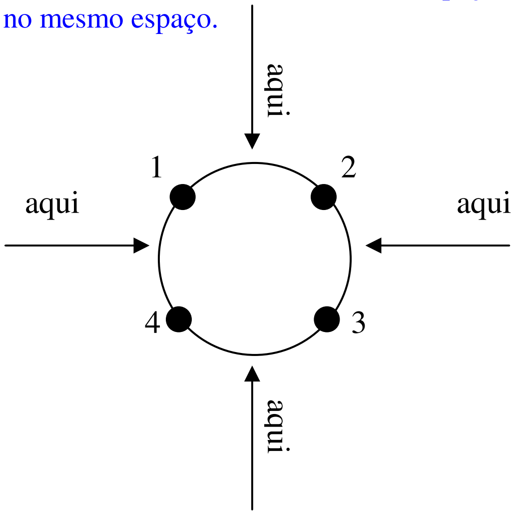
A resposta deve ser imediata (n – 1)! maneiras.

2) De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 6 crianças de modo Joãozinho e Mariazinha nunca fiquem juntos?

Já que essas duas crianças não podem ficar juntas, primeiro permutaremos circularmente as demais que são um total de quatro crianças (Chamaremos essas quatro de crianças 1,2,3 e 4)



e em seguida introduziremos Joãozinho e Mariazinha garantindo que eles não fiquem juntos. Mas é simples garantir que eles não fiquem juntos. Basta colocarmos cada um nos espaços entre duas crianças acima e nunca colocar Joãozinho e Mariazinha no mesmo espaço.



Podemos dispor circularmente as crianças 1,2,3 e 4 de (4 – 1)! = 3! = 6 maneiras e seguidas contamos as maneiras de dispor Joãozinho e Mariazinha de 4 x 3 = 12 maneiras.
Para finalizar podemos dispor essas seis crianças com Joãozinho e Mariazinha nunca juntos de

(4 – 1)! x 4 x 3 = 6 x 4 x 3 = 72 maneiras distintas.

Para você resolver

48) Com algumas crianças podemos formar setecentos e vinte rodas de ciranda. Quantas crianças fazem parte dessa brincadeira?
49) De quantas maneiras podemos dispor 7 objetos (O_1,O_2,0_3,...,0_7) circularmente e eqüidistantes entre si de modo que:
a) O_1 e O_2 nunca fiquem juntos.
b) O_1 e O_2 fiquem sempre juntos.
c) O_1 e O_2 sempre permaneçam juntos e O_1 a esquerda de O_2.
d) O_1, O_2 e O_3 sempre permaneçam juntos.
e) O_1, O_2 e O_3 permaneçam juntos e O_2 sempre entre O_1 e O_3.
f) a soma dos índices de dois elementos consecutivos sempre resulte em oito, quando possível.

50) (IMPA) – Quantos dados diferentes de seis faces existem se a soma das faces opostas deve ser 7?

51) De quantos modos podemos dispor 5 meninas e 6 meninos em uma roda de ciranda de modo que as meninas sempre fiquem juntas?
52) Uma roda Gigante é constituída de 15 acentos duplos. Assim sendo de quantos modos podemos dispor 15 casais nesse Brinquedo de modo que sempre cada casal permaneça junto?

4 - Arranjos simples

A ferramenta arranjos simples é utilizada quando desejamos formar filas com p elementos escolhidos a partir de um grupo de m elementos, com p ≤ m. Se, por exemplo, de um grupo de oito (8) pessoas, devemos dispor cinco (5) delas em fila. De quantos modos podemos realizar tal processo?

Já sabemos pelo principio multiplicativo ou principio fundamental da contagem que podemos formar:

$$\underline{\quad 8 \quad} \times \underline{\quad 7 \quad} \times \underline{\quad 6 \quad} \times \underline{\quad 5 \quad} \times \underline{\quad 4 \quad}$$

Desse modo obtemos 8 x 7 x 6 x 5 x 4 = 6720 filas com cinco pessoas escolhidas dentre oito.

Podemos concluir dessa maneira que Arranjos é uma aplicação do principio multiplicativo para formar filas quando for necessário escolher alguns elementos de um grupo para formar tal Fila. Simbolizaremos o resultado desse exemplo como $A_{8,5}$ (Arranjo 8 elementos tomados 5 a 5), isto é, formamos uma fila com cinco elementos selecionados de um grupo de oito. Também podemos encontrar o símbolo de arranjo como A_5^8.

Observe esse novo exemplo.
De um grupo de 20 pessoas deseja-se formar uma fila com 5 delas. Quantas filas distintas podemos formar?

A resposta é $A_{20,5}$ = 20 x 19 x 18 x 17 x 16. Observe que realizamos o produto de 20 até 16. Desse modo o produto contém cinco números consecutivos, pois é o número de posições da fila.

Seguindo esse raciocínio $A_{7,3}$ = 7 x 6 x 5, já que devemos realizar o produto de 7 pelos seus antecessores. Devemos usar três números que é o número de posições da fila em questão. Da mesma forma

$A_{100,4}$ = 100 x 99 x 98 x 97, pois temos de escolher dentre 100 elementos 4 para serem dispostos em fila.

Esse resultado também pode ser reescrito em função dos valores 100 e 4, observe:

$$A_{100,4} = \frac{100!}{(100-4)!}$$

Note que esse resultado é idêntico a $A_{100,4}$ = 100 x 99 x 98 x 97. Essa nova representação desse valor é motivada a aparecer apenas para efeito de generalização, isto é, para se obter uma fórmula geral para arranjos.

Da mesma Forma $A_{1000,100}$ = 1000 x 999 x 998 x 997 x ... x 903 x 902 x 901 ou $A_{1000,100} = \frac{1000!}{(1000-100)!}$

Para generalizar, se desejarmos dispor p elementos em fila escolhidos dentre de m elementos, com $p \le m$, podemos realizar esse processo de $A_{m,p} = \frac{m!}{(m-p)!}$ maneiras distintas.

Exercícios resolvidos

1) Quantos números de três dígitos distintos escolhidos entre 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, podemos formar?

Resolução:

Em outras palavras queremos formar uma fila de três algarismos escolhidos de um grupo de sete algarismos.
Podemos então formar $A_{7,3}$ filas distintas ou efetuando os cálculos obtemos:

$A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ números distintos.

Verifique que o resultado obtido acima também pode ser encontrado utilizando-se o teorema fundamental da contagem.

2) Quantas filas com quatro pessoas podemos formar a partir de um grupo de seis pessoas?

Resolução:

Podemos formar $A_{6,4}$ filas. Deixaremos os cálculos para você resolver.

3) Um grupo de pessoas é formado por cinco homens e três mulheres. Deseja-se formar filas com 5 dessas pessoas de modo que as três mulheres ocupem sempre as três primeiras posições. Assim, de todas as filas possíveis, quantas obedecem essa restrição?

Resolução:

Para iniciar vamos dispor as três mulheres nas três primeiras posições da fila e em seguida dispomos dois dos cinco homens nas duas últimas posições.

Na primeira ação podemos dispor as três mulheres de $A_{3,3}$ maneiras. Na segunda ação devemos dispor dois homens escolhidos dentre cinco, nas duas últimas posições, temos $A_{5,2}$ maneiras.

Finalmente devemos multiplicar os resultados parciais para obter:

$A_{3,3} \cdot A_{5,2} = \frac{3!}{(3-3)!} \cdot \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{3!}{0!} \cdot \frac{5!}{3!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ filas possíveis obedecendo a restrição dada.

Para você resolver

53) Roberta quer presentear Júlia e Natália. Resolveu, após investigar os gostos pessoas de suas duas amigas, que o presente de cada uma seria DVD's de música. Na loja especializada há de 10 opções para adquirir os dois presentes. Sabendo disso, de quantos modos diferentes Roberta pode presentear Júlia e Natália?

54) Junior é uma criança que possui oito brinquedos diferentes. Deseja brincar com cinco deles a cada dia, e com um deles a cada momento, isto é, ele não deseja brincar com dois ou mais ao mesmo tempo. Considerando essas informações responda:

a) De quantos modos diferentes Junior pode brincar com seus brinquedos, de acordo com as condições impostas acima?

b) Se Junior brinca de Segunda a sexta feira e brincou pela primeira vez numa quarta feira, em que dia da semana ele brincara pela antepenúltima vez sem que a seqüência de brinquedos se repita?

c) Quantos anos, aproximadamente, ele brincará com seqüências de brinquedos diferentes?

55) De quantas formas pode-se formar uma seqüência com 9 elementos distintos tomados a partir de 12?

56) Resolva a equação $\frac{p!}{(p-2)!} = 30$.

57) Resolva a equação $A_{5,p} = 60$.

58) Quantos são os arranjos de 8 elementos tomados de 3 a 3?

59) Calcule o valor de n na equação $A_{n,2} = 20$.

60) Numa maratona em que participam x atletas 80% terminam completam a prova. Se podemos formar o pódio com os três primeiros colocados de 336 maneiras distintas, qual o valor de x?

61) (FJP) Pode-se permutar **m** objetos de 24 maneiras diferentes. Suponha que se pretenda arranjar esses **m** objetos **dois a dois**. Nesse caso, de quantas maneiras diferentes esses **m** objetos poderão ser arranjados?

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16

5 – Combinações

5.1 – Combinações Simples

Combinação simples é uma ferramenta combinatória utilizada quando desejamos contar as possibilidades de formação de um subgrupo de elementos a partir de um grupo dado. Em outras palavras se possuirmos um Conjunto de elementos, desejamos contar as possibilidades de formação de um subconjunto formado a partir do conjunto dado.

É crucial nessa altura notar que quando formamos um subconjunto a partir de um conjunto dado, não estamos formando filas. Dessa maneira, quando se ver diante de um problema desse tipo, não devemos utilizar qualquer ferramenta que forme ordem entre os elementos em questão. Se por ventura forem formadas filas e não grupos (conjuntos) haverá uma contagem excessiva. Por exemplo, formar um grupo de duas pessoas utilizando Pedro, João e Ana é diferente de formar filas com duas dessas pessoas.

Com as essas três pessoas podemos formar 6 filas diferentes com duas delas, observe:

$$\underline{\text{PEDRO}}\setminus\underline{\text{JOÃO}} \qquad\qquad \underline{\text{JOÃO}}\setminus\underline{\text{ANA}}$$

$$\underline{\text{PEDRO}}\setminus\underline{\text{ANA}} \qquad\qquad \underline{\text{ANA}}\setminus\underline{\text{JOÃO}}$$

$$\underline{\text{JOÃO}}\setminus\underline{\text{PEDRO}} \qquad\qquad \underline{\text{ANA}}\setminus\underline{\text{PEDRO}}$$

De forma diferente, para formar um grupo devemos simplesmente agrupar duas pessoas. Desse modo a ordem entre os elementos é irrelevante. Estas duas filas distintas ($\underline{\text{PEDRO}}\setminus\underline{\text{JOÃO}}$) e ($\underline{\text{JOÃO}}\setminus\underline{\text{PEDRO}}$) formam o mesmo grupo. Dessa maneira se possuímos 3 pessoas e desejamos formar grupos de 2 pessoas teremos apenas **3 grupos** possíveis, já que os pares ($\underline{\text{PEDRO}}\setminus\underline{\text{ANA}}$ e $\underline{\text{ANA}}\setminus\underline{\text{PEDRO}}$); e os pares ($\underline{\text{JOÃO}}\setminus\underline{\text{ANA}}$ e $\underline{\text{ANA}}\setminus\underline{\text{JOÃO}}$) também formam um único grupo. Assim ao realizar a contagem dos grupos (3) contamos primeiro as filas possíveis (6) que é uma resposta incorreta e em seguida dividimos o resultado por 2, já que contamos cada grupo duas vezes de forma equivocada, por isso corrigimos esse erro para se chegar a resposta correta (3).

Imagine agora que desejamos a partir de um grupo de 4 pessoas $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, escolher 3 para formamos uma comissão.

Comissão sem qualquer hierarquia é sinônimo de grupo. Desse modo, como no exemplo anterior, vamos primeiro formar as filas possíveis e em seguida corrigir o resultado para obtermos a resposta correta, observe:

$$P_1\setminus P_2\setminus P_3 \quad P_1\setminus P_3\setminus P_2 \quad P_1\setminus P_4\setminus P_2 \quad P_2\setminus P_1\setminus P_3 \quad P_2\setminus P_3\setminus P_1 \quad P_2\setminus P_4\setminus P_1$$

$$P_1\setminus P_2\setminus P_4 \quad P_1\setminus P_3\setminus P_4 \quad P_1\setminus P_4\setminus P_3 \quad P_2\setminus P_1\setminus P_4 \quad P_2\setminus P_3\setminus P_4 \quad P_2\setminus P_4\setminus P_3$$

$$P_3\setminus P_1\setminus P_2 \quad P_3\setminus P_2\setminus P_1 \quad P_3\setminus P_4\setminus P_1 \quad P_4\setminus P_1\setminus P_2 \quad P_4\setminus P_2\setminus P_2 \quad P_4\setminus P_3\setminus P_1$$

$$P_3\setminus P_1\setminus P_4 \quad P_3\setminus P_2\setminus P_4 \quad P_3\setminus P_4\setminus P_1 \quad P_4\setminus P_1\setminus P_3 \quad P_4\setminus P_2\setminus P_3 \quad P_4\setminus P_3\setminus P_2$$

Pelo princípio multiplicativo temos 4x3x2 = 24 filas distintas, o que se verifica acima. No entanto não estamos interessados nas filas e sim nos grupos de três pessoas. Cada grupo tal como { $P_1;P_2;P_3$ } apareceram nas filas

$$P_1\setminus P_2\setminus P_3; \quad P_1\setminus P_3\setminus P_2; \quad P_2\setminus P_1\setminus P_3; \quad P_2\setminus P_3\setminus P_1; \quad P_3\setminus P_1\setminus P_2; \quad P_3\setminus P_2\setminus P_1.$$

desse modo cada grupo foi contado indevidamente seis vezes. Assim para acharmos a resposta correta devemos dividir a quantidade de filas (24) por 6, para obter 4 grupos.

Vamos, em seguida, considerar um outro exemplo:

A partir de um grupo de sete pessoas {Adriana, Bruno, Carol, David, Eduardo, Flávio, Gustavo} desejamos formar um subgrupo com quatro delas. De quantas formas podemos formar esse subgrupo?

Resolução:

Primeiro note que subgrupo de pessoas não é sinônimo de fila com pessoas. Numa fila a ordem é relevante, num subgrupo irrelevante.

No entanto para se obter a resposta **vamos supor**, de inicio, que estamos formando uma fila com as 7 pessoas. Uma vez formada a fila, selecionaremos os quatro primeiros indivíduos dessa fila para ter o grupo de quatro pessoas que queremos selecionar. Obteremos 7! filas distintas. Observe a ilustração:

Fila $\Rightarrow$ Adriana Bruno Carol David ⋮ Eduardo Flávio Gustavo,

A seqüência formada acima é uma das filas possíveis. Assim como vamos sempre selecionar os quatro primeiros de cada fila, teríamos, nesse exemplo, formado o grupo {Adriana, Bruno, Carol, David}.
Mas uma outra fila diferente, tal como:

$\Rightarrow$ Adriana Carol Bruno David ⋮ Eduardo Flávio Gustavo

formaria nas quatro primeiras posições o mesmo grupo {Adriana, Bruno, Carol, David}. Repare que da primeira para a segunda fila Bruno e Carol trocaram de posição, o que não mudou a formação do grupo. Desse modo podemos notar que toda vez que tomarmos uma fila em que Adriana, Carol, Bruno e David estiverem nas quatro primeiras posições formaremos um único grupo. Desse modo não é verdadeiro que a quantidade de conjuntos das quatro primeiras pessoas de uma fila de sete é igual a quantidade de filas formada por sete pessoas. E mais, a quantidade de filas é maior que a quantidade de conjuntos. Assim ao obtermos 7! achamos um resultado incorreto. Pois a contagem foi excessiva.
Mas nem tudo está perdido. 7! não é nossa resposta, porém **ela pode ser corrigida** para se chegar a resposta correta. Nosso erro inicial foi formar uma fila ao invés de um conjunto, assim, nesse momento devemos "desmantelar" a fila. Isto é, contamos excessivamente o conjunto {Adriana, Carol, Bruno, David} toda vez que formamos uma fila com essas pessoas nas quatro primeiras posições e as demais pessoas nas outras posições. O número de maneiras de dispor quatro pessoas em fila é 4!, e as demais (3 pessoas) é 3!. Assim para desmantelar a fila devemos **dividir 7! por 4!·3!.** Desse modo a resposta será $\frac{7!}{4!\cdot 3!}$.Observe:

$$\underbrace{\underbrace{\text{Adriana Bruno Carol David}}_{\textbf{4!}\text{ maneiras de dispor essas pessoas em fila}} \;\vdots\; \underbrace{\text{Eduardo Flávio Gustavo}}_{\textbf{3!}\text{ maneiras de dispor essas pessoas em fila}}}_{\textbf{7!}\text{ maneiras de dispor essas pessoas em fila}}$$

Esse resultado $\frac{7!}{4!\cdot 3!}$ será simbolizado por C_7^4 ou $C_{7,4}$, ou ainda $\binom{7}{4}$ lê-se: "combinação de 7 elementos tomados 4 a 4". Assim fica $C_7^4 = \frac{7!}{4!\cdot 3!}$, fazendo as contas obtemos

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 6} = \frac{7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\cdot \cancel{6}} = 7\cdot 5 = 35 \text{ grupos distintos.}$$

Esse processo no qual lançamos mão nos exemplos acima é muito usado em problemas de contagem. Primeiro contamos excessivamente de forma intencional para em seguida dividimos a resposta para se chegar a resposta correta.

Para generalizar a idéia de formação de grupos a partir de outro grupo dado, vamos observar os resultados do exemplo anterior.

Quando encontramos $\frac{7!}{4!\cdot 3!}$ o que tomamos no numerador foi a quantidade de filas com 7 pessoas **7!.** No denominador como um **"fator corretor"** tomamos a quantidade de filas com as quatro pessoas mencionadas **4!** e a quantidade de filas com as três pessoas restantes **3!. Assim a partir de uma fila, encontramos o conjunto desejado**. Para encontrarmos a quantidade de pessoas que restaram tomamos o total de pessoas 7 e subtraímos as pessoas já mencionadas 4. Assim a quantidade de pessoas restantes sempre será igual ao total de pessoas menos as já mencionadas. Podemos, dessa maneira substituir 3!, nas contas acima por $(7-4)!$, observe:

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7!}{4!\cdot(7-4)!}$$

Feito isso podemos generalizar essa idéia para uma quantidade qualquer de elementos.

Considere um grupo (ou conjunto) de **n** elementos. Queremos a partir dele, formar um subgrupo (ou subconjunto) com **p** elementos. Qual a quantidade de grupos distintos que podemos formar?

Resolução:
Como estamos trabalhando com qualquer quantidade de elementos (n e p) devemos tomar alguns cuidados.
Primeiro n e p devem ser números naturais.
Se, por exemplo, o número n for menor que o número p (n<p) isso significa que não podemos formar um subgrupo a partir do grupo dado, pois, a quantidade de elementos a serem tomadas é maior que a quantidade que dispomos. Por exemplo, não é possível formar um grupo de 5 elementos a partir de um grupo de 3. Teríamos dessa maneira 0 (zero) grupos formados. Portanto, o símbolo C_3^5 é igual a zero ($C_3^5 = 0$)
Se, por outro lado n for maior ou igual a p $(n \geq p)$, poderemos formar grupos sem dificuldade e a quantidade será $C_n^p = \frac{n!}{p!\cdot(n-p)!}$, se, por exemplo, n for igual a 10 e p igual a 6, teríamos $C_{10}^6 = \frac{10!}{6!\cdot(10-6)!} = \frac{10!}{6!\cdot 4!}$.

Fórmula Geral de combinações simples

A partir de um conjunto com n elementos devem-se formar um subconjunto com p elementos. A quantidade de subconjuntos é igual a C_n^p

Se $n < p$, $C_n^p = 0$ e se $n \geq p$, $C_n^p = \frac{n!}{p!\cdot(n-p)!}$

Observação: $n, p \in \{0,1,2,3,4,5...\}$; 0!=1 ; 1!=1

Exercícios resolvidos

1) Dentre 9 livros distintos que estão em oferta em uma livraria, Fátima deseja escolher 5 para comprar. De quantos modos diferentes Fátima pode escolher os 5 livros?
Resolução:

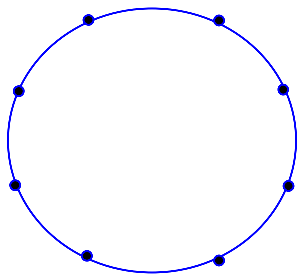
Repare que nessa situação o que Fátima deve fazer é escolher 5 livros dentre 9, isto é, formar um grupo de 5 livros a partir de um grupo de 9. Desse modo ela pode realizar esse processo de C_9^5 maneiras diferentes.

Esse símbolo resulta em:

$$C_9^5 = \frac{9!}{5!\cdot(9-5)!} = \frac{9!}{5!\cdot 4!} = \frac{9\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} \overset{\text{simplifica ndo } 5! \text{ com } 5!,\ 4\cdot 2 \text{ com } 8 \text{ e } 6 \text{ com } 3, \text{ obtemos}}{=} 9\cdot 7\cdot 2 = 126 \text{ maneiras.}$$

2) Sobre uma circunferência são marcados 8 pontos distintos. Quantos triângulos com vértices nos pontos dados é possível construir?

Resolução:

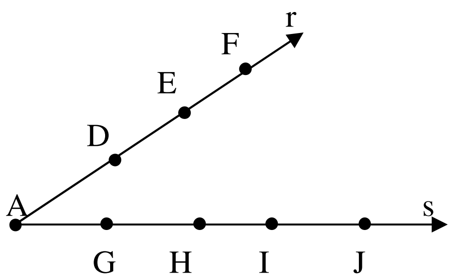


Primeiro vamos construir a circunferência com os pontos.
Em seguida devemos observar que para formamos um triangulo devemos ter três pontos não alinhados. Mas quaisquer três pontos de uma circunferência nunca estão alinhados. Assim podemos tomar quaisquer três pontos dessa circunferência.
Se queremos tomar três pontos a partir de 8, o que temos a fazer é formamos um grupo de três pontos a partir de 8. A quantidade de maneiras de realizar esse processo é C_8^3.
(acostume com esse símbolo, ele representa uma situação de contagem, as contas vêm depois)

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{3!\cdot\cancel{5!}} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{6}} = 56 \text{ triângulos diferentes}$$

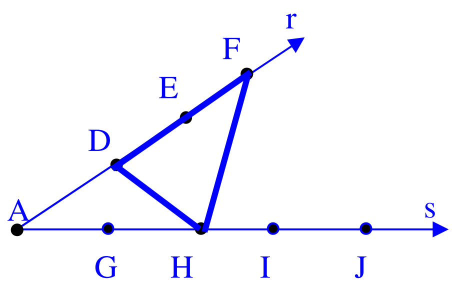
3) Observe está figura, e marque a alternativa que representa o número de triângulos que se obtém com vértices nos pontos D, E, F, G, H, I, J:

a) 20
b) 21
c) 25
d) 30
e) 35



Resolução:

Para formamos triângulos devemos ter três pontos não alinhados. Dessa maneira não podemos tomar três pontos sobre uma mesma reta. Pontos tais como D, E e F estão alinhados e não formam um triângulo. Para garantirmos que sempre formaremos triângulos devemos tomar, como vértices de um triângulo dois pontos em uma reta e um em outra, como o exemplo abaixo:



Assim devemos considerar dois casos. O primeiro é tomar dois pontos sobre *r* e um sobre *s* e o segundo caso é tomar um sobre *r* e dois sobre *s*.

1º caso: Tomar dois pontos sobre a reta r ***e*** um sobre s.

Sobre a reta r temos 3 pontos disponíveis e devemos escolher 2, podemos fazer isso de C_3^2 *maneiras* e em seguida sobre s escolher 1 dentre 4 disponível, temos C_4^1 *maneiras* de fazer isso. Assim teremos $C_3^2 \cdot C_4^1$ *triângulos com 2 vértices sobre r e 1 sobre s,* que resulta em:

$$C_3^2 \cdot C_4^1 = \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} \times \frac{4!}{1!\cdot(4-1)!} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} \times \frac{4!}{1!\cdot 3!} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ triângulos}$$

2º caso: Tomar um ponto sobre a reta r e dois sobre s.

De forma análoga do caso anterior devemos escolher 1 ponto dentre 3 disponíveis sobre r e 2 sobre s dentre 4 disponíveis. Na primeira ação temos C_3^1 e na segunda ação C_4^2 maneiras de realizar esse processo. Assim podemos formar $C_3^1 \cdot C_4^2$ *triângulos com dois vértices sobre s e um sobre r,* que resulta em:

$$C_3^1 \cdot C_4^2 = \frac{3!}{1!\cdot(3-1)!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{3!}{1!\cdot 2!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 3 \cdot \frac{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2!}} = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18 \text{ triângulos}$$

Para finalizar basta somar os resultados, para obter 12 + 18 = *30 triângulos distintos*, portanto letra d.

4) Na série A do campeonato brasileiro de futebol edição 2006, 20 times disputam a competição. Nesse tipo de torneio há duas fases, e em cada uma todos os times jogam contra todos. Quem obter mais pontos vence.
a) Quantos jogos serão disputados em 2006 na primeira fase?
b) Quantos jogos serão disputados entre os times paulistas na primeira fase sabendo que há 7 times de São Paulo?

Resolução:
a) Como temos 20 times, para formar um jogo devemos escolher 2 deles, isto é, formar um grupo de 2 times a partir de um grupo de 20. Assim teremos C_{20}^2 jogos diferentes. Calculando o valor desse número obtemos:

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2!\cdot(20-2)!} = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{\cancel{20} \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{18!}} = 10 \cdot 19 = 190 \textbf{ jogos distintos}.$$

b) Como queremos que os jogos tenham necessariamente 2 paulistas, devemos escolher esses dois dentre os 7 que dispomos, podemos fazer isso de C_7^2, que é igual a:

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!\cdot(7-2)!} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} = 7 \cdot 3 = 21 \text{ jogos entre os paulistas.}$$

5)A partir de um grupo de 5 pessoas, desejam-se formar grupos com quantidade de pessoas igual ou inferior a 5. Quantos grupos distintos podem ser formados.

Resolução:

Como devemos formar grupo de pessoas a partir de um grupo de 5. Teremos vários casos a considerar, repare:

- 1º CASO: Formar um grupo de 0 (Zero) pessoas a partir de 5, a quantidade de grupos é igual a C_5^0 .
- 2º CASO: Formar um grupo de 1 (uma) pessoa a partir de 5, a quantidade de grupos é igual a C_5^1 .
- 3º CASO: Formar um grupo de 2 (duas) pessoas a partir de 5, a quantidade de grupos é igual a C_5^2 .
- 4º CASO: Formar um grupo de 3 (três) pessoas a partir de 5, a quantidade de grupos é igual a C_5^3 .
- 5º CASO: Formar um grupo de 4 (quatro) pessoas a partir de 5, a quantidade de grupos é igual a C_5^4 .
- 6º CASO: Formar um grupo de 5 (cinco) pessoas a partir de 5, a quantidade de grupos é igual a C_5^5

Listamos todas as formas possíveis de montagem dum grupo de pessoas a partir de 5 indivíduos. Assim para obter o total de grupos com quantidade de pessoas de 0 até 5 pessoas devemos somar os resultados parciais acima:

$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$. Repare que os cálculos desses valores é o que menos importa na questão. Cada símbolo indica uma situação combinatória, por exemplo, C_5^4 indica que formamos um grupo de 4 pessoas a partir de um grupo de 5. Para finalizar obteremos a resposta fechada, isto é, realizando os cálculos, obteremos:

$$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = \frac{5!}{0! \cdot (5-0)!} + \frac{5!}{1! \cdot (5-1)!} + \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} + \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} + \frac{5!}{4! \cdot (5-4)!} + \frac{5!}{5! \cdot (5-5)!}$$

$$\frac{\cancel{5!}}{0! \cdot \cancel{5!}} + \frac{5!}{1! \cdot 4!} + \frac{5!}{2! \cdot 3!} + \frac{5!}{3! \cdot 2!} + \frac{5!}{4! \cdot 1!} + \frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 0!} = 1 + \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} + \frac{5 \cdot \cancel{4}^2 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} + \frac{5 \cdot \cancel{4}^2 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{2} \cdot 1} + \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} + 1 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$$

Finalmente podem-se formar 32 grupos a partir de um grupo de 5 pessoas.

Para você resolver

PARTE I

62) Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas com 8 pessoas?

63) De um grupo de animais de um zoológico deseja-se selecionar quatro para exames. Sabendo que esse processo pode ser realizado de 35 maneiras distintas, quantos animais há no zoológico?

a) 7 b) 6 c) 10 d) 41

64) Nas eleições nacionais de quatro em quatro , dentre outros cargos elegemos, em eleições alternadas, dois senadores da república. Supondo que em Minas Gerais em 2002 (último ano que isso ocorreu) candidataram-se 12 pessoas para o cargo. Quantas maneiras distintas têm um eleitor para escolher seus senadores?

a) 120 b) 132 c) 24 d) 66

65) Dispomos de um conjunto com 8 elementos distintos. Sabendo disso calcule quantos subconjuntos podemos formar com:

a) 1 elemento
b) 2 elementos
c) 3 elementos
d) 5 elementos
e) 6 elementos
f) 8 elementos
g) quaisquer quantidade de elementos
h) pelo menos 5 elementos
i) No máximo 4 elementos
j) Até 3 elementos
k) No mínimo 6 elementos

66) (FCMMG) Um fisioterapeuta recomendou a um paciente que fizesse, todos os dias, três tipos diferentes de exercícios e lhe forneceu uma lista contendo sete tipos diferentes de exercícios adequados a esse tratamento. Ao começar o tratamento, o paciente resolve que, a cada dia, sua escolha dos três exercícios será distinta das escolhas feitas anteriormente. O número máximo de dias que o paciente poderá manter esse procedimento é

A) 35 B) 38 C) 40 D) 42 E) 60

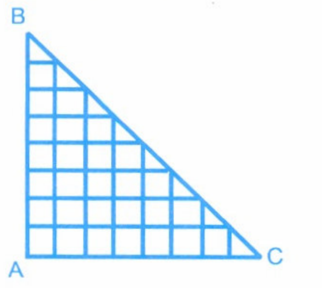
67) (MAUÁ) Calcular p, sabendo que $Am,p = C_{m,p}$ qualquer que seja m e $0 \leq p \leq m$.

68) (MACK) Separam-se os números de 1 a 10 em dois conjuntos de 5 elementos de modo que 1 e 8 não estejam no mesmo conjunto. Isso pode ser feito de n modos distintos, o valor de n é:
a) 20 b) 35 c) 70 d)140 e) 200

69) A partir de um grupo de 55 pessoas calcule quantos subgrupos podemos formar com:

a) 30 pessoas
b) 70 pessoas
c) 21 pessoas
d) até 10 pessoas
e) pelo menos 50 pessoas

70) (FEl) Caminhando sempre para a direita ou para cima, sobre a rede da figura, de quantas maneiras se pode ir do ponto A até a reta BC?



a) 8 b) 64 c) 256 d) 1024 e) nenhuma das anteriores

71) Simplifique

a) $\dfrac{8!}{5!}$ b) $\dfrac{8!}{7!}$ c) $\dfrac{15!}{13!}$ d) $\dfrac{10!}{5!\cdot 7!}$ e) $\dfrac{30!}{28!\cdot 2!}$ f) $\dfrac{n!}{(n-3)!}$

g) $\dfrac{k!}{(k-1)!}$ h) $\dfrac{3\cdot a!}{(a-2)!\cdot 3!}$ i) $\dfrac{n!+(n-1)!}{(n+1)!}$ j) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$ k) $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)!}$

l) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$

72) Sabendo-se que $C_{n,2} = 10$ calcule n.

73) (CESCEM) O valor de p na equação $\frac{A_{p,3}}{C_{p,4}} = 12$ é:

A) 12 B) 9 C) 8 D) 6 E) 5

74) (MACK) Se $C_{x,3} = 3A_{x,2}$, então x é:

a) 20 b) 18 c) 16 d) 14 e) 12

75) (FEI) Sendo $5 \cdot C_{n,n-1} + C_{n,n-3} = A_{n,3}$ calcular n.

76) (MAUÁ) Sabendo que o número de combinações de n + 2 objetos tomados cinco a cinco, vale $\frac{28n}{3}$,calcule o valor de n.

77) (CESCEM) Um conjunto A possui n elementos, sendo n > 4. O número de subconjuntos de A com 4 elementos é:

a) $\frac{n!}{24(n-4)!}$ b) $\frac{n!}{(n-4)!}$ c) $(n-4)!$ d) n! e) 4!

78) (Fafi-MG) Se existem 11 pessoas em uma sala e cada pessoa cumprimenta todas as outras uma única vez, o número de apertos de mão dados será igual a

a) 55 b) 65 c) 110 d) 121

79) Em um polígono regular de 5 vértices podemos definir n diagonais. O valor de $n^2 + 25$ é

a) 35 b) 110 c) 15 d) 30 e) 50

80) (UNESP-SP-adaptada) A diretoria de uma empresa compõe-se de n dirigentes, contando o presidente. Considere todas as comissões de três membros que poderiam ser formadas com esses n dirigentes. Se o número de comissões que incluem o presidente é igual ao número daquelas que não o incluem, o valor de n é:

a) 10 b) 7 c) 12 d) 15 e) 6

81) (CESCEM) Sobre uma circunferência, marcam-se 7 pontos, 2 a 2 distintos, O número de triângulos que podemos formar com vértices nos pontos marcados é;

A) 3 B)7 C)30 D)35 E)210

82) (MACK) O conjunto A tem 45 subconjuntos de 2 elementos. O número de elementos de A é:

A) 10 B)15 C) 45 D)90 E) impossível determinar com a informação dada

83) (UFMG) Uma urna contém 12 bolas: 5 pretas, 4 brancas e 3 vermelhas. O número de maneiras possíveis de se retirar simultaneamente, dessa urna, grupos de 6 bolas que contém pelo menos uma bola de cada cor, é:
a) 84 b) 252 c) 805 d) 924

84) (UFMG) Duas das cinqüenta cadeiras de uma sala estão ocupadas por dois alunos. O número de maneiras distintas possíveis que esses alunos terão para escolher duas das cinqüenta cadeiras, para ocupá-las é:

A) 1225 B) 2450 C) 2^{50} D) 49! E) 50!

85) (UFMG) Formam-se comissões de três professores entre os sete de uma escola. O número de comissões distintas que podem, assim, ser formados é:
A) 35 B) 45 C) 210 D) 7^3 E) 7!

PARTE II

86) (Diamantina-MG) Numa congregação de 30 professores, 14 lecionam matemática, O número de comissões com 14 professores que podem ser formadas de modo que, em cada uma, tenha apenas um professor de matemática é

a) 7540 b) 7840 c) 8040 d) 8340

87) (FGV) Uma empresa tem 3 diretores e 5 gerentes. Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formados, contendo no mínimo um diretor?

A) 500 B) 720 C) 4500 D) 25 E) 55

88) (VUNESP) De uma urna contendo 10 bolas coloridas, sendo 4 brancas, 3 pretas, 2 vermelhas e 1 verde, retiram-se, de uma vez, 4 bolas. Quantos são os casos possíveis em que aparecem exatamente uma bola de cada cor?

a) 120 b) 72 c) 24 d) 18 e) 12

89) (UEL) Um professor de Matemática comprou dois livros para premiar dois alunos de uma classe de 42 alunos. Como são dois livros diferentes, de quantos modos distintos pode ocorrer a premiação?

a) 861 b) 1722 c) 1764 d) 3444 e) 2^{42}

90) (FGV) Numa classe de 10 estudantes, um grupo de 4 será selecionado para uma excursão. De quantas maneiras o grupo poderá ser formado se dois dos dez são marido e mulher e só irão juntos?
a) 126 b) 98 c) 115 d) 165 e) 122

91) (UFMG) Em uma lanchonete, os sorvetes são divididos em três grupos: o vermelho, com 5 sabores; o amarelo, com 3 sabores; e o verde, com 2 sabores. Pode-se pedir uma casquinha com 1, 2 ou 3 bolas, mas cada casquinha não pode conter 2 bolas de um mesmo grupo. O número de maneiras distintas de se pedir uma casquinha é

A) 71 B) 86 C) 131 D) 61

92) (FUNDAÇÃO LUSÍADA) O número de produtos positivos de três fatores distintos, que podem ser obtidos com os elementos do conjunto {1, -1, 4, -4, 5, -5, 7, 8}, é:

A) 336 B) 273 C) 56 D) 26 E) 25

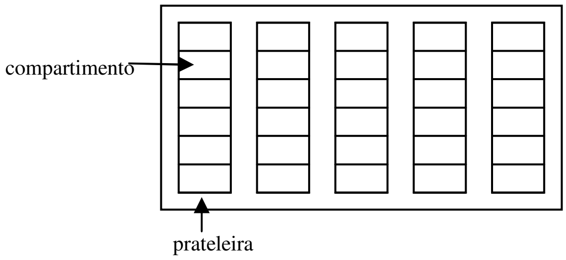
93) (MACK) Um juiz dispõe de 10 pessoas, das quais somente 4 são advogados, para formar um único júri com 7 jurados. O número de formas de compor o júri, com pelo menos 1 advogado, é:

a) 120 b) 108 c) 160 d) 140 e) 128

94) Do cardápio de uma festa constavam dez diferentes tipos de salgadinhos dos quais só quatro seriam servidos quentes. O garçom encarregado de arrumar a travessa e servi-la foi instruído para que a mesma contivesse sempre só 2 diferentes tipos de salgadinhos frios, e só 2 diferentes dos quentes. De quantos modos diferentes, teve o garçom a liberdade de selecionar os salgadinhos para compor a travessa, respeitando as instruções?

a) 90 b) 21 c) 240 d) 38 e) 80

95) A figura abaixo representa uma loja vista de cima com 5 prateleiras e cada uma contém 6 compartimentos.



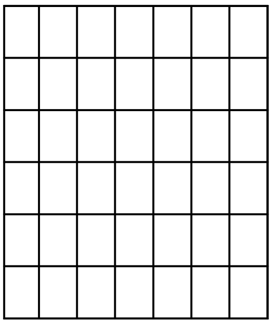
De quantas maneiras possíveis pode-se a acomodar, de forma eqüitativa, um lote de produto alimentício nessa loja de modo que fiquem sempre numa mesa prateleira e em exatamente três compartimentos?

a) $C_{30,3}$ b) $C_{30,6} \cdot C_{6,3}$ c) 100 d) 150 e) 120

96) (CEFET-MG) Num plano, existem vinte pontos dos quais três nunca são colineares, exceto seis que estão sobre uma mesma reta. O número de retas determinado pelos vinte pontos é

a) 150 b) 176 c) 185 d) 205 e) 212

97) Observe a figura:



Nela está representado um quadro retangular subdividido em retângulos menores para acomodar fotos. Sabendo disso de quantas maneiras uma pessoa pode escolher os retângulos para acomodar:

a) Cinco fotos;
b) Sete fotos;
c) No máximo cinco fotos;
d) De cinco até dez fotos;
e) No mínimo 30 fotos;

98) Uma sala tem 7 lâmpadas com interruptores independentes. O número de modos de iluminar essa sala é:

a) 12 b) 126 c) 127 d) 128

99) (MAPOFEI) A diretoria de uma firma é constituída por 7 diretores brasileiros e 4 japoneses. Ouantas comissões de 3 brasileiros e 3 japoneses podem ser formados?

100) (MAPOFEI) Uma urna contém 10 bolas brancas e 6 pretas. De quantos modos é possível tirar 7 bolas dos quais pelo menos 4 bolas sejam pretas?

101) (FCMMG) Sejam e s duas retas distintas e paralelas. Marcam-se n pontos distintos $P_1, P_2, P_3, ..., P_{n,}$ sobre r e dois pontos distintos Q_1 e Q_2 sobre s. O número máximo de triângulos distintos que podem ser formados com vértices nesses n + 2 pontos é 121. O número n é igual a
A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

102) (UFMG) Um teste é composto por 15 afirmações. Para cada uma delas, deve-se assinalar, na folha de respostas, uma das letras V ou F, caso a afirmação seja, respectivamente, verdadeira ou falsa. A fim de se obter, pelo menos, 80% de acertos, o número de maneiras diferentes de se marcar a folha de respostas é:

a) 455 b) 576 c) 560 d) 620

103) (Unesp-SP) Na convenção de um partido para lançamento da candidatura de uma chapa ao governo de certo estado havia 3 possíveis candidatos a governador, sendo dois homens e uma mulher, e 6 possíveis candidatos a vice-governador, sendo quatro homens e duas mulheres. Ficou estabelecido que a chapa governador/vice-governador seria formada por duas pessoas de sexos opostos. Sabendo que os nove candidatos são distintos, o número de maneiras possíveis de se formar a chapa é

a) 18 b) 12 c) 8 d) 6 e) 4

104) (MACK) Uma classe tem 10 meninos e 9 meninas. O número de comissões diferentes que podemos formar com 4 meninos e 3 meninas, incluindo obrigatoriamente o melhor aluno dentre os meninos e a melhor aluna dentre as meninas, é dado por:

A) $A_{10,4} \cdot A_{9,3}$ B) $C_{10,4} - C_{9,3}$ C) $A_{9,2} \cdot A_{8,3}$ D) $C_{9,3} \cdot C_{8,2}$ E) $C_{19,7}$

105) (UFMG-adaptada) Em uma viagem aérea, um passageiro tem em sua bagagem, 20 livros diferentes entre os quais um escrito em alemão. Desses livros, dez pesam 200g cada um, seis pesam l00 g cada um e quatro, 500g cada um. No entanto, ele só pode levar 1,2 Kg de livros. Sabendo-se que pretende levar o livro em alemão e o dicionário, que pesam respectivamente, 200g e 500g, o número de maneiras distintas de obter 1,2 kg, é:

a) 210 b) 280 c) 219 d) 50

106) (FGV-SP) São dados 10 pontos num plano, dos quais 8 sobre uma mesma reta r e os outros 2 não alinhados com quaisquer outros dois pontos dos oito sobre a reta r. Quantos diferentes triângulos podem ser formados usando os pontos dados como vértices?

a) 56 b) 64 c) 80 d) 120 e) 144

107) (PUC-MG) Um técnico de futebol de salão tem à disposição 8 jogadores de linha e 2 goleiros. Um time deve ter quatro jogadores de linha e um goleiro. O número de times distintos que o técnico pode escalar é:

a) 60 b) 70 c) 80 d) 120 e) 140

108) (UFU-MG) Em um plano há 12 pontos, dos quais três nunca são colineares, exceto 5 que estão sobre uma mesma reta. O número de retas determinadas por esses pontos é:

a) 56 b) 57 c) 46 d) 47 e) 77

109) (MACK) O número de triângulos determinados por 7 pontos distintos. 4 sobre uma reta e 3 sobre uma paralela à primeira, é:

A) 60 B) 30 C) 20 D)10 E) 5

110) De um grupo de 12 pessoas deseja-se selecionar 8 delas para formar duplas. Qual o número de duplas distintas possíveis de serem formadas?

a) 2 987 b) 3 914 c) 66 d) 207 900

111) (CEFET-MG) Um técnico de futebol de salão dispõe de 7 jogadores de linha e 2 goleiros, para formar um time composto por um goleiro e quatro jogadores. O número de maneiras diferentes que esse técnico pode escalar seu time é

a) 63 b) 70 c) 126 d) 840 e) 1 680

112) (CESCEM) O Sr. Moreira, dirigindo-se ao trabalho, vai encontrando seus amigos e levando-os juntos no seu carro, Ao todo, leva 5 amigos, dos quais apenas 3 são conhecidos entre si. Feitas as apresentações, os que não se conheciam apertam-se as mão, dois a dois, O número total de apertos de mãos é:

a) $C_{5,2} - C_{3,2}$ b) $A_{5,2} - A_{3,2}$ c) $P_5 - P_3$ d) $C_{5,2}$ e) $C_{3,2}$

113) (FCMMG) Um laboratório dispõe de 5 camundongos machos e n fêmeas. Se existem 360 maneiras de selecionar dois machos e duas fêmeas para uma experiência, o número n é igual a:
A) 6 B) 9 C) 10 D) 12

114) (INST. CHAMPAGNOT) São dadas duas retas distintas paralelas; sobre a primeira marcam-se 8 pontos, e sobre a segunda, marcam-se 4 pontos. Então, o número de quadriláteros convexos que se obtém com os vértices nos pontos marcados é:
A) 120 B) 168 C) 210 D)84 E) n.r.a.

115) (Vunesp) De um grupo constituído de 6 enfermeiros e 2 médicos, deseja-se formar comissões de 5 pessoas. Quantas dessas comissões podem ser formadas se os 2 médicos devem, necessariamente, fazer parte de todas as comissões?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 168 E) 336

116) Sejam r e t duas retas paralelas e distintas. Sobre r estão marcados sete pontos e sobre t, quatro. Responda às perguntas:

a) Quantas retas ficam determinadas pelos pontos marcados?
b) Quantos segmentos?
c) Quantos triângulos?
d) Quantos quadriláteros?

117) (CEFET-MG) Um professor quer formar comissões de quatro alunos numa classe constituída de 10 rapazes e 7 moças. O número de comissões nas quais participará somente uma moça é

a) 70 b) 140 c) 560 d) 840 e) 1020

118) Formam-se comissões de quatro professores escolhidos entre os 12 de uma escola. Dos 12, 4 são professores de matemática, 3 de literatura e 5 de história. Sabendo disso, responda:

a) Quantas comissões podem-se formar?
b) Quantas comissões podem-se formar com exatamente 2 professores de história?
c) Quantas comissões podem-se formar com exatamente 3 professores de matemática?
d) Quantas comissões podem-se formar com exatamente 4 professores de literatura?
e) Quantas comissões podem-se formar com pelo menos 1 professor de história?
f) Quantas comissões podem-se formar com no máximo 2 professores de literatura?
g) Quantas comissões podem-se formar sem professores de matemática?
h) Quantas comissões podem-se formar sem professores de história?
i) Quantas comissões podem-se formar sem professores de literatura?
j) Quantas comissões podem-se formar sem professores de matemática e literatura?
k) Há possibilidade de se formar uma comissão com professores de uma só área do conhecimento? Se possível qual(is) área(s)?
l) Quantas comissões podem-se formar com no máximo 3 professores de matemática e nenhum professor de literatura?

119) (FMIT-MG) Um tabuleiro de xadrez possui 16 casas dispostas em 4 linhas e em 4colunas. Uma pessoa deseja colocar 4 peças no tabuleiro de tal forma que, em cada linha e cada coluna, seja colocada apenas uma peça . O número de maneiras diferentes que as 4 peças poderão ser colocadas é
a) 16 b) 30 c) 60 d) 288 e) 576

120) (UFMG) Num jogo de dominó possui 28 peças distintas. Quatro jogadores repartem entre si essas 28 peças, ficando cada um com sete peças. De quantas maneiras distintas se pode fazer tal distribuição?

a) $\dfrac{28!}{(7!)(4!)}$ b) $\dfrac{28!}{(4!)(24!)}$ c) $\dfrac{28!}{(7!)^4}$ d) $\dfrac{28!}{(7!)(21!)}$

121) Um grupo de 10 atletas é divido em duas equipes, A e B, de 5 atletas cada, para disputarem uma prova de revezamento. O número de maneiras diferentes de fazer essa divisão é

a) 252 b) 126 c) 320 d) 64 e) 504

122) (LONDRINA) Seis gremistas e um certo número de colorados assistem a um Grenal. Com o empate final, todos os colorados cumprimentam-se entre si uma única vez e todos os gremistas cumprimentam-se entre si uma única vez, havendo no total 43 cumprimentos. O número de colorados é:

A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E)14

123) (CESCEM) De quantas maneiras distintas um grupo de 10 pessoas pode ser dividido em 3 grupos de 5, 3 e 2 pessoas?

A) 2340 B) 2480 C) 3640 D) 2520 E) não sei

124) (Cefet-MG) Um estudante deve responder a 10 entre 13 perguntas formuladas em um teste, não importando a ordem. Se é necessário que entre as 10 respondidas fiquem; pelo menos 3 das 5 primeiras questões respondidas, o número de escolhas que ele pode fazer é:

a) 56 b) 80 c) 140 d) 276 e) 452

125) Numa turma com 5 alunos, cada um recebe uma ficha numerada 1 à 5. De quantas maneiras podemos selecionar 3 deles de modo que não escolhamos alunos com fichas de números consecutivos?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

126) (FaFi-MG) Um indivíduo possui 5 discos dos Beatles, 8 discos do Rolling Stones e 4 discos do Dire Strates. Ele foi convidado para ira uma festa e, ao sair, levou 2 discos dos Beatles, 2 dos Rolling Stones e 3 do Dire Strates. O número de modos distintos de se escolherem os discos é

a) 12 b)42 c) 160 d) 1120 e) 1200

127) (FCMMG) Em uma escola são oferecidas 12 disciplinas em 2 grupos distintos: 8 do primeiro e 4 do segundo. Um estudante vai fazer um curso de 4 disciplinas, sendo 3 do primeiro grupo e uma do segundo. Se o estudante faz a disciplina S_I do segundo grupo, fica automaticamente dispensado das disciplinas P_1 e P_2 do primeiro grupo. As demais disciplinas do segundo grupo não originam dispensas. O número de opções que o estudante tem é:

a) 180 b) 188 c) 240 d) 3360 e) 3600

128) (FCMMG) De certa doença são conhecidos exatamente 8 sintomas. Para que um médico possa dizer, com certeza, se o paciente sofre de tal enfermidade, é necessário que ele constate:

I. a existência dos sintomas A e B simultaneamente ou
II. a existência de 5 desses sintomas

O número de manifestações diferentes que permitem obter um diagnóstico seguro é
a) 176 b) 42 c) 41 d) 37 e) 7

129) (Fumec-MG) Considere o conjunto de todas as comissões de 5 pessoas, que se podem formar com 6 homens e 5 mulheres, de modo que cada comissão tenha, no máximo, 4 e no mínimo 2 mulheres. Seja F o número das comissões em que há mais mulheres do que homens; seja M o número de comissões em que os homens detêm a supremacia numérica. Nesse caso,

a) F = M b) F = M + 20 c) F = M – 10 d) F = M + 10 e) F = M – 20

130) (PUC-Campinas) Pretende-se formar uma comissão de 5 membros a partir de um grupo de 10 operários e 5 empresários, de modo que nessa comissão haja pelo menos dois representantes de cada uma das duas classes. O total de diferentes comissões que podem ser assim formadas é

a) 1 000 b) 185 c) 19400 d) 1 750 e) 1650

131) (UFMG) A partir de um grupo de 14 pessoas, quer-se formar uma comissão de oito integrantes, composta de um presidente, um vice-presidente, um secretário, um tesoureiro e quatro conselheiros. Nessa situação, de quantas maneiras distintas se pode compor essa comissão?

a) $\frac{14!}{4!\cdot 6!}$ b) $\frac{14!}{(4!)^2}$ c) $\frac{14!}{6!\cdot 8!}$ d) $\frac{14!}{4!\cdot 10!}$

132) (UFMG) A partir de um grupo de oito pessoas, quer-se formar uma comissão constituída de quatro integrantes. Nesse grupo, incluem-se Gustavo e Danilo, que, sabe-se, não se relacionam um com o outro. Portanto, para evitar problemas, decidiu-se que esses dois, juntos, não deveriam participar da comissão a ser formada. Nessas condições, de quantas maneiras distintas se pode formar essa comissão?

A) 70 B) 35 C) 45 D) 55

133) (PUC-MG) O número de maneiras pelas quais seis pessoas podem ser distribuídas em três grupos, A, B e C, cada um formado por duas pessoas, é

a) 60 b) 75 c) 80 d) 85 e) 90

134) (UFF) Uma fábrica produz três modelos de carros. Para cada modelo o cliente deve escolher entre sete cores diferentes, cinco tipos de estofamento e vidros brancos ou verdes. Além disso, o cliente pode adquirir, opcionalmente, o limpador do vidro traseiro. A quantidade de maneiras distintas que essa fábrica pode montar carros para atender a todas as possíveis escolhas de seus clientes é:

a) 60 b) 70 c) 140 d) 210 e) 420

135) Em um grupo de 8 pessoas há 3 mulheres. O número de comissões que podem ser formadas com 3 dessas 8 pessoas, comparecendo em cada comissão pelo menos um homem, é

a) ímpar e menor que 30
b) par e menor que 45
c) maior que $C_{7,3}$
d) maior que $A_{5,3}$
e) múltiplo de 3

136) (PUC-RJ) Para compor uma banca examinadora de exame vestibular com 3 membros, o diretor de um departamento dispõe de m professores associados ($m \geq 3$) e de n professores assistentes ($n \geq 2$). Quantas são as possibilidades, se na banca deve figurar ao menos um associado?

a) $m \cdot n$ b) $C_{m,3} + C_{m,2} \cdot n + C_{n,2} \cdot m$ c) $C_{m,3} + C_{m,2} + C_{m,1}$ d) m + n e) $P_m - P_n$

137) (Unicamp-SP-adaptada) De quantas maneiras podem ser escolhidos 3 números naturais distintos, de 1 a 30, de modo que sua soma seja par?

a)1 780 b) 2 050 c) 1 600 d) 2 030

138) (FMTM-MG) Em um hospital trabalham 15 médicos dos quais exatamente 4 são clínicos gerais. O número de maneiras de se formar uma comissão de 3 médicos de modo que sempre exista pelo menos 1 clínico geral na comissão é

a) 455 b) 1740 c) 290 d) 364 e) 180

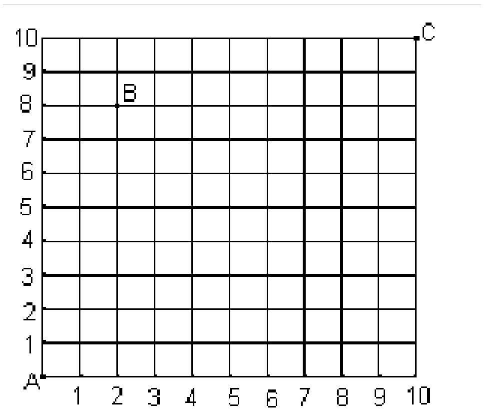
139) (URFJ) Um piano de brinquedo possui 7 teclas, que emitem sons distintos entre si, correspondentes às 7 notas da pauta abaixo. Se forem pressionadas, ao mesmo tempo, no mínimo 3 e no máximo 6 teclas,o total de sons diferentes que podem ser obtidos é

a) 21
b) 28
c) 42
d) 63
e) 98

140) (Fuvest-SP) Uma ONU decidiu preparar sacolas, contendo 4 itens distintos cada, para distribuir entre a população carente. Esses 4 itens devem ser escolhidos entre 8 tipos de produtos de limpeza e 5 tipos de alimentos não perecíveis. Em cada sacola, deve haver pelo menos um item que seja alimento não perecível e pelo menos um item que seja produto de limpeza. Quantos tipos de sacolas distintas podem ser feitos?

a) 360 b) 420 c) 540 d) 600 e) 640

141) (UFMG-adaptada) Observe a figura:



Considere os caminhos ligando A a C, passando por B, traçados a partir de A, deslocando-se sempre, ou 1 unidade para a direita, na horizontal, ou 1 unidade para cima, na vertical. O número total de caminhos distintos obtidos dessa forma é:

a) 120 b) 210 c) 45 d) 45^2

142) (FGV) Dentre 6 números positivos e 6 números negativos, de quantos modos podemos escolher quatro números cujo produto seja Positivo?
A) 255 B)960 C)30 D)625 E)720

143) (João Pinheiro- MG) Numa fábrica, são produzidos e vendidos seis tipos diferentes de refrigerantes. Além disso, podem-se misturar esses refrigerantes três a três, em quantidades iguais, obtendo-se, assim, novos tipos de refrigerantes. Nesse caso, o total de tipos diferentes de refrigerantes que essa fábrica dispõe para venda é

a) 20 b) 26 c) 48 d) 60

144) (MAPOFEI) São dados 12 Pontos em um plano, dos quais 5 e somente 5 estão alinhados. Quantos triângulos distintos podem ser formados com vértices em três quaisquer dos 12 Pontos?

145) (UFOP-MG) Numa assembléia, de que participam 5 matemáticos e 5 físicos, são constituídas comissões formadas por três membros, incluindo, no mínimo, um matemático. Podemos afirmar que o número de comissões que podem ser formadas é

a) 15 b) 20 c) 50 d) 100 e) 110

146) Um eletricista tem 13 lâmpadas, sendo cinco delas de 30 watts, três de 50 watts, quatro de 100 watts e uma de 24 watts. Deseja-se dispor algumas delas num circuito elétrico em série de modo que a soma de suas potências seja igual a 224. De quantas maneiras o eletricista pode escolher as lâmpadas?

a) 7 b) 6 c) 9 d) 87

147) João, no dia do seu aniversário, faz uma relação de nomes de quinze pessoas amigas. A quantidade de maneiras que ele poderá convidar cinco destas pessoas para almoçar e sete para jantar, sabendo-se que cada convidado pode ir a apenas uma das refeições e na relação há um casal inseparável, é:

a) $\binom{13}{3}\cdot\binom{10}{7}+\binom{13}{5}\cdot\binom{8}{5}+\binom{13}{5}\cdot\binom{8}{7}$

b) $\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{7}$

c) $\binom{13}{3}\cdot\binom{10}{7}+\binom{13}{5}\cdot\binom{8}{5}$

d) $2\cdot\binom{13}{3}\cdot\binom{10}{7}$

e) $\left[\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{7}\right]^2$

148) Num zoológico há dez animais, dos quais devem ser selecionados cinco para ocupar determinada jaula. Se entre eles há dois que devem permanecer sempre juntos, o total de maneiras distintas de escolher os cinco que vão ocupar tal jaula, é:

a) 56 b) $\left(\frac{8!}{5!\cdot 3!}\right)^2$ c) $2\cdot\left(\frac{8!}{5!\cdot 3!}\right)$ d) $\frac{8!}{3!}$

149) O número de paralelogramos que são determinados por um feixe de sete retas paralelas, interceptando um outro feixe de cinco retas paralelas, é:

a) C_{12}^{4} b) $\frac{12!}{8!}$ c) 2000 d) $\frac{7!}{(2!)^2\cdot 3!}$

150) (MAPOFEI-adaptada) Um químico possui 10 tipos de substâncias. De quantos modos possíveis poderá associar 6 dessas substâncias se, entre as dez, duas somente não podem ser juntadas Porque produzem mistura explosiva?

a) $\frac{8!}{6!2!}\cdot 7$ b) $2\cdot\frac{9!}{6!3!}$ c) 5000 d) 120

151) (PUC-Camp.) Em uma sacola há 20 bolas de mesma dimensão: 4 são azuis e as restantes vermelhas. O número de maneiras distintas que se pode extrair um conjunto de 4 bolas desta sacola de modo que haja pelo menos uma azul dentre elas é:

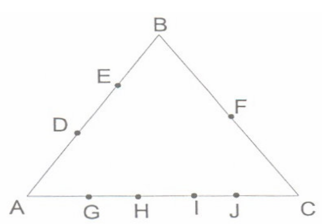
a) $\frac{20!}{16!}-\frac{16!}{12!}$ b) $\frac{20!}{4!16!}$ c) $\frac{20!}{16!}$ d) $\frac{1}{4!}\left(\frac{20!}{16!}-\frac{16!}{12!}\right)$ e) n.r.a.

152) (UFMG) Observe a figura. Nessa figura, o número de triângulos que se obtém com vértices nos pontos D, E, F, G, H, 1 e J é:

A) 20

B) 21

C)25



D) 31
E) 35

PARTE III

153) (UNIV. EST. DE FEIRA DE SANTANA) O número de equipes de trabalho que poderão ser formadas num grupo de dez indivíduos, devendo cada equipe ser constituída por um coordenador, um secretário e um digitador, é:

a) 240 b) 360 c) 480 d) 600 e) 720

154) (FGV) Nove pessoas param para pernoitar num hotel. Existem 3 quartos com 3 lugares cada. O número de formas que estas pessoas podem se distribuir entre os quartos é
a) 84 b) 12 c) 840 d) 1680 e) 3200

155) A partir de um grupo de 10 jovens devemos selecionar 6 para formar uma equipe com um presidente e um vice-presidente. De quantos modos distintos podemos formar essa equipe?

a) $\frac{10!}{4!}$ b) $\frac{10!}{(4!)^2}$ c) $\frac{10!}{4!2!}$ d) $\frac{10!}{4!6!}$

156) (UFMG) Num grupo constituído de 15 pessoas, cinco vestem camisas amarelas, cinco vestem camisas vermelhas e cinco vestem camisas verdes. Deseja-se formar uma fila com essas pessoas de forma que as três primeiras vistam camisas de cores diferentes e que as seguintes mantenham a seqüência de cores dada pelas três primeiras. Nessa situação, de quantas maneiras distintas se pode fazer tal fila?

a) $3(5!)^3$ b) $(5!)^3$ c) $(5!)^3 \cdot (3!)$ d) $\frac{15!}{3!5!}$

157) (POLI) Entendendo-se por diagonal de um Poliedro todo segmento que liga dois vértices não pertencentes a uma mesma face, quantas diagonais Possuí um prisma cujas bases são polígonos de n lados?

158) (UFMG) Uma escola possui 10 professores que lecionam somente pela manhã, 8 que lecionam somente à tarde e 5 que lecionam somente à noite. Deseja-se constituir uma comissão de 4 professores dessa escola.

1. De quantas formas pode ser constituída essa comissão?
2. Das formas possíveis, em quantas **não** haverá professor que leciona pela manhã?
3. Das formas possíveis, em quantas **não** haverá professor que leciona à tarde?
4. Das formas possíveis, em quantas haverá, **pelo menos,** um professor que leciona pela manhã e, **pelo menos,** um professor que leciona à tarde?

159) (UFMG) Um baralho é composto por 52 cartas divididas em quatro naipes distintos. Cada naipe é constituído por 13 cartas - 9 cartas numeradas de 2 a 10, mais Valete, Dama, Rei e Ás, representadas, respectivamente, pelas letras J, Q, K e A. Um par e uma trinca consistem, respectivamente, de duas e de três cartas de mesmo número ou letra. Um *full hand* é uma combinação de cinco cartas, formada por um par e uma trinca. Considerando essas informações, CALCULE:

1. de quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand* com um par de reis e uma trinca de 2.
2. de quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand* com um par de reis.
3. de quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand*.

160) (UFMG) Numa escola, há 10 professores de Matemática e 15 de Português. Pretende-se formar, com esses professores, uma comissão de sete membros.

1. Quantas comissões distintas podem ser formadas?
2. Quantas comissões distintas podem ser formadas com, pelo menos, **um** professor de Matemática?
3. Quantas comissões distintas podem ser formadas com, pelo menos, **dois** professores de Matemática e, pelo menos, **três** professores de Português?

161) (UFMG) Para um grupo de 12 pessoas, serão sorteadas viagens para três cidades distintas **A**, **B** e **C**. Cinco dessas pessoas irão para a cidade **A**; quatro, para a cidade **B**; e três, para cidade **C**. Nesse grupo, estão Adriana, Luciana e Sílvio, que são amigos e gostariam de ir para a mesma cidade.
Considerando essas informações, **RESPONDA**:

1. De quantas maneiras distintas se podem sortear as viagens de modo que Adriana, Luciana e Sílvio viajem para a cidade **A**?

2. De quantas maneiras distintas se podem sortear as viagens de modo que Adriana, Luciana e Sílvio viajem para a mesma cidade?

162) (PUC) n retas paralelas de um plano se interceptam com uma série de m retas paralelas, desse mesmo plano. Então, o número de paralelogramos que se obtém na rede assim distribuída é:

a) $C_{n,2} : C_{m,2}$ b) $C_{m,2} - C_{n,2}$ c) $2C_{m,2} + 2C_{n,2}$ d) $C_{m,2} + C_{n,2}$ e) $C_{m,2} \cdot C_{n,2}$

163) (CESCEM) Dá-se o nome de plano diagonal de um tronco de pirâmide triangular a qualquer plano que contenha três vértices do sólido, que não pertençam a uma mesma face do tronco, O número de planos diagonais é:

a) $C_{6,3}$ b) 120 c) 9 d) 6 e) 3

GABARITO

1) a- $9 \cdot 10^4 = 90000$ **b-** $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$ **c-** $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10^3 = 6000$

d- $10 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 \cdot 8 + 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 + 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ **e-** $1^4 \cdot 10^4 = 10000$

f- iguais $10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 10$ diferentes = todos - iguais $= 10^4 - 10 = 9990$ **g-** $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1 = 648$

h- $9 \cdot 10^3 \cdot 1^4 = 9000$ **i-** $1 \cdot 10^3 \cdot 1^4 = 1000$ **j-** $9^2 \cdot 8 \cdot 1^2 = 648$ **k-** $23^4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1^4$

2) a- $26^3 \cdot 10^4$ **b-** $26 \cdot 1^2 \cdot 10^4$ **c-** $26 \cdot 25 \cdot 1 \cdot 10^2 \cdot 1^2 = 26 \cdot 25 \cdot 10^2$ **d-** $5^3 \cdot 5^4 = 5^7$ **e-** $1 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 10^4 = 23 \cdot 10^4$

3) $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

4) 15 mulheres **5)** b **6)** $6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$ **7)** a **8)** d **9)** d

10) e **11)** $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ **12)** $3 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 72$ **13)** c **14) a-** 2 **b-** 1

c- 3 **d-** 3 **15)** b **16)** d **17)** b **18)** c **19)** d **20)** c

21) d **22)** c **23) a-** $10!$ **b-** $7!$ **c-** $8!$ **d-** $8! \cdot 3!$ **e-** $4 \cdot 3 \cdot 8! = 12 \cdot 8!$

f- $6 \cdot 4 \cdot 8! = 24 \cdot 8!$ **g-** $4 \cdot 6 \cdot 8!$ **h-** $4 \cdot 9! + 6 \cdot 9! - 4 \cdot 6 \cdot 8!$ **24) a-** $5!$ **b-** $10!$

c- $14! \cdot 2$ **d-** $14!$ **e-** $8! \cdot 2^2$ **f-** $8!$ **g-** $70!$ **h-** $10! \cdot 60!$ **i-** $61! \cdot 10!$

25) a- $25!$ **b-** $16! \cdot 10!$ **c-** $25! - 5 \cdot 4 \cdot 23!$ ou $20 \cdot 19 \cdot 23!$ **26)** b **27)** 5! = 120

28) b **29)** d **30)** $2! \cdot 6! \cdot 4! = 34560$ **31)** b **32)** a **33)** d

34) d **35)** a **36)** a **37)** c **38)** e **39)** 6 soldados **40)** c

41) c **42) a-** $\frac{7!}{3!}$ **b-** $\frac{10!}{2!2!3!}$ **c-** $\frac{8!}{3!2!3!}$ **d-** $\frac{14!}{2!2!4!}$ **e-** $\frac{7!}{2!2!}$ **f-** $\frac{11!}{2!2!2!2!}$ **g-** $\frac{9!}{2!2!2!}$

h- $9!$ **i-** $\frac{8!}{2!2!}$ **j-** $\frac{10!}{4!4!}$ **k-** $\frac{7!}{3!}$ **l-** $\frac{6!}{2!}$ **43)** $\frac{1 \cdot 6!}{4!2!}$ **44)** $\frac{6!}{4!}$

45) d **46)** $1 \cdot \frac{4!}{2!}$ **47)** $\frac{40!}{7!5!9!}$ **48)** 7 crianças **49) a-** $6! - 5! \cdot 2$ **b-** $5! \cdot 2$

c) $5!$ **d-** $4!3!$ **e-** $4!2!$ **f-** $3!(2!)^3$ **50)** 2 **51)** $5!6!$ ou $5! \cdot 6 \cdot 5!$

52) $14! 2^{15}$ **53)** $A_{10,2} = 10 \cdot 9 = 90$ **54) a-** 6720 maneiras distintas **b-** segunda-feira **c-** 28 anos

55) $A_{12,9}=\dfrac{12!}{(12-9)!}=12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4$ **56)** 6 **57)** 3

58) $A_{8,3}=\dfrac{8!}{(8-3)!}=\dfrac{8!}{5!}=8\cdot 7\cdot 6=336$ **59)** 5 **60)** 10 **61)** b

62) $C_8^3=\dfrac{8!}{3!5!}=56$ **63)** a **64)** d **65) a-** $C_8^1=8$ **b-** $C_8^2=\dfrac{8!}{2!6!}=28$

c- $C_8^3=\dfrac{8!}{3!5!}=56$ **d-** $C_8^5=\dfrac{8!}{5!3!}=56$ **e-** $C_8^6=\dfrac{8!}{6!2!}=28$ **f-** $C_8^8=1$

g- $C_8^0+C_8^1+C_8^2+C_8^3+C_8^4+C_8^5+C_8^6+C_8^7+C_8^8=1+8+28+56+70+56+28+8+1=2^8=256$

h- $C_8^5+C_8^6+C_8^7+C_8^8=56+28+8+1=93$ **i-** $C_8^0+C_8^1+C_8^2+C_8^3+C_8^4=1+8+28+56+70=163$

j- $C_8^0+C_8^1+C_8^2+C_8^3=1+8+28+56=93$ **k-** $C_8^6+C_8^7+C_8^8=28+8+1=37$ **66)** a

67) p=0 ou p=1 **68)** c **69) a-** $C_{55}^{30}=\dfrac{55!}{30!25!}$ **b-** $C_{55}^{70}=0$ **c-** $C_{55}^{21}=\dfrac{55!}{21!34!}$

d- $C_{55}^0+C_{55}^1+C_{55}^2+\ldots+C_{55}^8+C_{55}^9+C_{55}^{10}$ **e-** $C_{55}^{50}+C_{55}^{51}+C_{55}^{52}+C_{55}^{53}+C_{55}^{54}+C_{55}^{55}$

70) c **71) a-** 336 **b-** 8 **c-** 210 **d-** 6 **e-** 435 **f-** $n(n-1)(n-2)=n^3-3n^2+2n$

g- k **h-** $\dfrac{a(a-1)}{2!}=\dfrac{a^2-a}{2}$ **i-** $\dfrac{1}{n}$ **j-** n+1 **k-** n+2 **l-** n

72) 5 **73)** e **74)** a **75)** 4 **76)** 6 **77)** a **78)** a **79)** e

80) e **81)** d **82)** a **83)** c **84)** b **85)** a **86)** b **87)** e

88) c **89)** b **90)** b **91)** a **92)** e **93)** a **94)** a

95) $C_5^1\cdot C_6^3=100$ c **96)** b **97) a-** $C_{42}^5\cdot 5!$ **b-** $C_{42}^7\cdot 7!$

c- $C_{42}^0\cdot 0!+C_{42}^1\cdot 1!+C_{42}^2\cdot 2!+C_{42}^3\cdot 3!+C_{42}^4\cdot 4!+C_{42}^5\cdot 5!$ **d-** $C_{42}^5\cdot 5!+C_{42}^6\cdot 6!+C_{42}^7\cdot 7!+C_{42}^8\cdot 8!+C_{42}^9\cdot 9!+C_{42}^{10}\cdot 10!$

e- $C_{42}^{30}\cdot 30!+C_{42}^{31}\cdot 31!+C_{42}^{32}\cdot 32!+\ldots+C_{42}^{40}\cdot 40!+C_{42}^{41}\cdot 41!+C_{42}^{42}\cdot 42!$ **98)** c **99)** $C_7^3\cdot C_4^3=140$

100) $C_6^4\cdot C_{10}^3+C_6^5\cdot C_{10}^2+C_6^6\cdot C_{10}^1=2080$ **101)** c **102)** a **103)** c **104)** d

105) b **106)** b **107)** $C_8^4\cdot C_2^1=140$ letra e **108)** $C_{12}^2-C_5^2+1$ letra b

109) $C_4^2\cdot C_3^1+C_4^1\cdot C_3^2$ ou $C_7^3-C_3^3-C_4^3=30$ letra b **110)** $C_{12}^8\cdot C_8^2\cdot C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2=207900$ letra d **111)**

$C_7^4\cdot C_2^1=70$ letra b **112)** a **113)** b **114)** b **115)** c

116) a- $C_{11}^2-C_7^2-C_4^2+1+1=30$ **b-** $C_4^1\cdot C_7^1+C_4^2+C_7^2=126$

c- $C_{11}^3-C_7^3-C_4^3$ ou $C_4^1\cdot C_7^2+C_4^2\cdot C_7^1=126$ **d-** $C_4^2\cdot C_7^2 ou C_{11}^4-C_7^4-C_4^4-C_7^3\cdot C_4^1-C_4^3\cdot C_7^1=126$

117) $C_7^1\cdot C_{10}^3=840$ letra d **118)** **119)** e **120)** c **121)** $C_{10}^5\cdot C_5^5=252$ letra a

122) $C_n^2+C_6^2=43$ n=8 letra d **123)** $C_{10}^5\cdot C_5^3\cdot C_2^2=2520$ letra d

124) $C_5^3\cdot C_8^7+C_5^4\cdot C_8^6+C_5^5\cdot C_8^5=276$ letra d **125)** a **126)** $C_5^2\cdot C_8^2\cdot C_4^3=1120$ letra d

127) b **128)** d **129)** e **130)** e **131)** a **132)** $C_6^4+2\cdot C_6^3=55$ letra d

133) $C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2=90$ letra e **134)** c **135)** C_8^3-1 e $C_8^3-1>C_7^3$, letra c

136) b **137)** $C_{15}^3+C_{15}^2+C_{15}^1=2030$ letra d

138) $C_{15}^3-C_{11}^3 ou C_4^1\cdot C_{11}^2+C_4^2\cdot C_{11}^1+C_4^3\cdot C_{11}^0=290$ letra c **139)** $C_7^3+C_7^4+C_7^5+C_7^6=98$ letra e

140) $C_8^1 \cdot C_5^3 + C_8^2 \cdot C_5^2 + C_8^3 \cdot C_5^1 = 640$ letra e

141) $C_{10}^2 \cdot C_{10}^8 \text{ou} C_{10}^8 \cdot C_{10}^2 = 45^2$ letra e

142) $C_6^4 + C_6^2 \cdot C_6^2 + C_6^4 = 255$

143) $6 + C_6^3 = 26$ letra b

144) $C_{12}^3 - C_5^3 \text{ou} C_7^2 \cdot C_5^1 + C_7^1 \cdot C_5^2 + C_7^3 = 210$

145) $C_5^1 \cdot C_5^2 + C_5^2 \cdot C_5^1 + C_5^3 \cdot C_5^0 \text{ou} C_{10}^3 - C_5^3 = 110$ letra e

146) c

147) a

148) $C_8^5 + C_8^3 = 2 \cdot \frac{8!}{3!5!}$ letra c

149) $C_7^2 \cdot C_5^2 = \frac{7!}{(2!)^2 \cdot 3!}$ letra d

150) $2 \cdot C_9^6 + C_8^6 = \left(\frac{8!}{2!6!}\right) \cdot 7$ letra a

151) $C_{20}^4 - C_{16}^4 = \frac{20!}{4!16!} - \frac{16!}{4!12!} = \frac{1}{4!}\left(\frac{20!}{16!} - \frac{16!}{12!}\right)$ letra d

152) $C_7^3 - C_4^3 = 31$ letra d

153) $A_{10,3} \text{ou} C_{19}^3 \cdot 3! = 720$ letra e

154) $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 1680$ letra b

155) $C_{10}^6 \cdot 6 \cdot 5 = C_{10}^6 \cdot \frac{6!}{4!} = \frac{10!}{(4!)^2}$ letra b

156) c

157) n(n-3)

158) 1- $C_{10+8+5}^4 = C_{23}^4$ **2 -** $C_{8+5}^4 = C_{13}^4$ **3-** $C_{10+5}^4 = C_{15}^4$ **4-** $C_{23}^4 - C_{15}^4 - C_{13}^4$

159) 1- $C_4^2 \cdot C_4^3$ **2-** $C_4^2 \cdot C_{12}^1 \cdot C_4^3$ **3-** $C_{13}^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{12}^1 \cdot C_4^3$

160) 1- C_{25}^7

2- $C_{25}^7 - C_{10}^7$ ou $C_{10}^1 \cdot C_{15}^6 + C_{10}^2 \cdot C_{15}^5 + C_{10}^3 \cdot C_{15}^4 + \ldots + C_{10}^7 \cdot C_{15}^0$ **3-** $C_{10}^2 \cdot C_{15}^5 + C_{10}^3 \cdot C_{15}^4 + C_{10}^4 \cdot C_{15}^3$

161) 1- $C_3^3 \cdot C_9^2 \cdot C_7^4 \cdot C_3^3$ **2-** $C_3^3 \cdot C_9^2 \cdot C_7^4 \cdot C_3^3 + C_9^5 \cdot C_3^3 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3 + C_9^5 \cdot C_4^4 \cdot C_3^3$

162) e

163) d